

Sidste gang

$\oplus$

$$(1) p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \quad (\text{Tabel 1.3.7})$$

$$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned} \quad (\text{Tabel 1.3.6})$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad (\text{Tabel 1.3.6})$$

$$(2) \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$(3) \neg(\neg p) \equiv p \quad (\text{Tabel 1.3.6})$$

Af (1), (2) og (3) følger:

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q \quad (\text{Tabel 1.3.7})$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$
S	S	S	F
S	F	F	S
F	S	S	F
F	F	S	F

Husk at læse (og forstå!) de andre ækv. i Tabel 1.3.6-8

Tautologi, modstrid, kontingens

$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{N}$

Kvantorer (Afsnit 1.4)

(Quantifiers)

Eks:

$$P(x) : \underbrace{2x > x}_{\text{frit udsagn}}$$

frit udsagn (propositional function)

$$\begin{array}{lll} \vdots & & \\ P(-1) : & -2 > -1 & \text{F} \\ P(0) : & 0 > 0 & \text{F} \\ P(1) : & 2 > 1 & \text{S} \\ P(2) : & 4 > 2 & \text{S} \\ \vdots & & \end{array}$$

$P(x)$ er sand, for ethvert $x \in \mathbb{Z}^+$. Altså:

$$\begin{array}{l} P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \dots \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}^+ : P(x) \end{array} \quad \textcircled{\text{S}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{Z}^+ : 2x > x}$$

„for alle“

„gælder“

udsagn

bunden variabel

Universel kvantor

universet / domænet (udelades sommetider, hvis det er underforstået)

Derimod er $P(x)$ ikke sand for alle $x \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{Z} : 2x > x \\ \Leftrightarrow \dots \wedge P(-1) \wedge P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \end{array} \quad \textcircled{\text{F}}$$

Bemærk:

Når man læser f.eks. $\forall x \in \mathbb{Z}$, siger man som regel "for alle heltal x " i stedet for "for alle x i mængden af heltal".

More notation:

Eks: $Q(x): 2x > x+4$

For hvilke x -værdier er $Q(x)$ sand?

$$\begin{aligned} & 2x > x+4 \\ \Leftrightarrow & x > 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Q(5) \wedge Q(6) \wedge Q(7) \wedge \dots \end{aligned}$$

⑤

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \forall x \in \{5, 6, 7, \dots\} : Q(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 5 : Q(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z} : \underbrace{(x \geq 5 \Rightarrow 2x > x+4)}_{R(x)} \end{aligned}$$

(*)

$$\text{(Tabel 1.3.7)} \quad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z} : (x \leq 4 \vee 2x > x+4)$$

Bemærk:

(*) illustrer, at def. af $\Rightarrow$ er meningsfuld:

$$\begin{array}{l} \vdots \\ R(3): \quad F \Rightarrow F \quad S \\ R(4): \quad F \Rightarrow F \quad S \\ R(5): \quad S \Rightarrow S \quad S \\ R(6): \quad S \Rightarrow S \quad S \\ \vdots \end{array}$$

$S \Rightarrow F$ opstår ikke

$$\begin{array}{l} \Downarrow \quad \forall x \in \{6, 7, 8, \dots\}: 2x > x+4 \\ \forall x \in \mathbb{Z}: \underbrace{x \geq 6 \Rightarrow 2x > x+4}_{T(x)} \end{array}$$

⑤ (følger af (*))

(**)

$$\begin{array}{l} \vdots \\ T(4): \quad F \Rightarrow F \\ T(5): \quad F \Rightarrow S \\ T(6): \quad S \Rightarrow S \\ \vdots \end{array}$$

$S \Rightarrow F$ opstår ikke

Da (**) følger af (*), er (*) et *stærkere* udsagn end (**).

(D.v.s. der er mere information i (*) end i (**).)

Eks:

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z}^+ : Q(x) \\ \Leftrightarrow & Q(1) \wedge Q(2) \wedge Q(3) \wedge \dots \quad \textcircled{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee \dots \quad \textcircled{S} \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{Z}^+ : Q(x) \end{aligned}$$

↑ "Der eksisterer" "sådan at"

Eksistentiel kvantor

$\exists x \in \mathbb{Z}^+$ læses "der eksisterer et positivt heltal x ".

$$\exists x \in \mathbb{Z} : Q(x) \quad \textcircled{S}$$

$$\begin{aligned} & \exists x \in \{10, 11, 12, \dots\} : Q(x) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{Z}, x \geq 10 : Q(x) \quad \textcircled{S} \end{aligned}$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 2 : Q(x) \quad \textcircled{F}$$

Eks:

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad \textcircled{S} \quad (x=0)$$

Ovenstående udsagn kan præciseres:

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad \textcircled{S}$$

↑
"Der eksisterer præcis ét"

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x \cdot x \quad \textcircled{F} \quad (x=0, x=1)$$

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 \quad \textcircled{F}$$

Kvantorer har højere præcedens end de logiske operatoren

$$\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow \oplus$$

Eks:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \leq 3 \vee x \geq 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{Z} : (x \leq 3 \vee x \geq 4) \quad \text{!} \\ (\forall x \in \mathbb{Z} : x \leq 3) \vee x \geq 4 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Negering af kvantificerede udsagn

Eks:

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 &\equiv \text{F} \\ \Downarrow \quad \neg \forall x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 &\equiv \text{S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad \neg \forall x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 \\ \Downarrow \quad \exists x \in \mathbb{Z} : \neg(2x \geq 4) \\ \Downarrow \quad \exists x \in \mathbb{Z} : 2x < 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad \exists x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 &\equiv \text{S} \\ \Downarrow \quad \neg \exists x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 &\equiv \text{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad \neg \exists x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 &\quad \text{F} \\ \Downarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z} : \neg(2x \geq 4) \\ \Downarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z} : 2x < 4 \end{aligned}$$

Eks:

T: mængden af studerende, som er tilmeldt
DM547 / DM549 / MM537 / MM540

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad \neg \forall x \in T : x \text{ er mødt op til denne forelæsning} \\ \Downarrow \quad \exists x \in T : x \text{ er ikke mødt op til denne forelæsning} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad \neg \neg \forall x \in T : x \text{ er mødt op til denne forelæsning} \\ \Downarrow \quad \forall x \in T : x \text{ er ikke mødt op til denne forelæsning} \end{aligned}$$

Generelt

De Morgans Love for Kvantorer:

$\neg \forall x : P(x)$	$\equiv$	$\exists x : \neg P(x)$
$\neg \exists x : P(x)$	$\equiv$	$\forall x : \neg P(x)$

(Tabel 1.4.2)
S. 51

Nogle gange skriver man $\nexists$ i stedet for $\neg \exists$.

Eks:

$$\begin{aligned} \Uparrow \quad & \neg \forall x \in \mathbb{N} : (2x \geq 4 \vee 2x \geq 2^x) \\ & \exists x \in \mathbb{N} : (2x < 4 \wedge 2x < 2^x) \end{aligned} \quad \begin{matrix} S \\ S \end{matrix} \quad (x=0)$$

Udsagnet kan præciseres:

$$\exists ! \in \mathbb{N} : (2x < 4 \wedge 2x < 2^x) \quad S$$

Åbne udsagn kan have mere end én fri variabel.

Eks: $P(x, y) : x + y = 0$

$$P(2, -2) \equiv S$$

$$P(2, 0) \equiv F$$

Generelt:

$$P(x, y) \Leftrightarrow x = -y$$

Indlejrede kvantorer (afsnit 1.5)

Eks: $P(x,y) : x+y=0$

$$\Updownarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : P(x,y) \quad \text{S}$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x+y=0$$

Er sandt, hvis nederstående er muligt:

For hvert $x \in \mathbb{Z}$:

Find et $y \in \mathbb{Z}$, så:

$$x+y=0$$

$$\text{Vælg } y = -x$$

D.v.s. y må gerne afhænge af x

Har kvantorenes orden betydning?

$$\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x+y=0 \quad \text{F}$$

Er sandt, hvis nederstående er muligt:

Find et $y \in \mathbb{Z}$, så:

Enhvert $x \in \mathbb{Z}$ opfylder:

$$x+y=0$$

Her skal vi vælge et y , der passer sammen med alle $x \in \mathbb{Z}$.

Generelt: $\exists y : \forall x : Q(x,y) \Rightarrow$
 $\forall x : \exists y : Q(x,y)$

D.v.s. $\exists y : \forall x : Q(x,y)$ er et stærkere udsagn
end $\forall x : \exists y : Q(x,y)$,

ligesom $x > 20$ er et stærkere udsagn end $x > 10$,
fordi $x > 20 \Rightarrow x > 10$ ($x > 20$ siger mere om x
end $x > 10$, d.v.s. $x > 20$ giver mest information).

Eks: (kvantorenes orden)

S: mængden af studerende i dette lokale

H: mængden af hobbies

$P(x,y)$: x har y som hobby

Alle studerende i dette lokale har en hobby

$\forall x \in S : \exists y \in H : P(x,y)$

$\exists y \in H : \forall x \in S : P(x,y)$

Der er en hobby, som alle stud. i dette lokale har.