

Sidste gang:

Kvantorer : åbent udsagn $\rightarrow$ udsagn

Eks:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : |x| \geq x$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : |x| = x$$

$$\neg \exists ! x \in \mathbb{Z} : |x| = x$$

$$\begin{aligned}\neg \forall x : P(x) &\equiv \exists x : \neg P(x) \\ \neg \exists x : P(x) &\equiv \forall x : \neg P(x)\end{aligned} \quad (\text{De Morgans Love})$$

Eks:

T: mængden af studerende tilmeldt
DMS47 / DMS49 / MMS37 / MMS40

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \neg \forall x \in T : x \text{ deltager i dag} \\ \Leftrightarrow \exists x \in T : x \text{ deltager ikke i dag}\end{aligned}$$

$$\nrightarrow \Leftrightarrow \begin{aligned}\exists x : \forall y : P(x,y) \\ \forall y : \exists x : P(x,y)\end{aligned}$$

Eks:

S: mængden af studerende i dette lokale

H: ——— hobbies

$P(x,y)$: x har hobby y

$$\begin{aligned}\nrightarrow \Leftrightarrow \begin{aligned}\exists y \in H : \forall x \in S : P(x,y) \\ \forall x \in S : \exists y \in H : P(x,y)\end{aligned}\end{aligned}$$

1 dag:

Afrunding af indlyrede kvantor
Bevismetoder (Afsnit 1.6-1.8)

Næste gang:
Induktionsbeviser

Eks (negering):

$$\begin{aligned} & \neg (\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x > y) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{Z} : \neg (\forall y \in \mathbb{Z} : x > y) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq y \end{aligned}$$

Eks: (negering - hobbies revisited)

S: mængden af studerende i ditte lokale

H: mængden af hobbies

$P(x,y)$: x har y som hobby

$$\begin{aligned} & \neg \forall x \in S : \exists y \in H : P(x,y) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in S : \forall y \in H : \neg P(x,y) \end{aligned}$$

„Der er en studerende i ditte lokale,
som ikke har nogen hobby.“

$$\begin{aligned} & \neg \exists y \in H : \forall x \in S : P(x,y) \\ \Leftrightarrow & \forall y \in H : \exists x \in S : \neg P(x,y) \end{aligned}$$

„Der er ingen hobby, som deles af alle
studerende i lokalt.“

Eks: (ens kvantorer)

Når kvantorerne er ens, må man gæne bytte om på rækkefølgen:

$$\begin{array}{l} \Downarrow \\ \forall x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y) \\ \Downarrow \\ \forall y \in \mathbb{Z}: \forall x \in \mathbb{Z}: (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y) \\ \Downarrow \\ \forall x, y \in \mathbb{Z}: (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y) \end{array}$$

„går op i“

(Se Tabel 1.5.1, s. 63)

Sidste omskrivning er gyldig, fordi x og y har samme univers.

Eks : (tre kvantorer)

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall z \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z \quad S$$

For hvert $x \in \mathbb{Z}^+$

Vælg et $y \in \mathbb{Z}^+$, så

Enhvert $z \in \mathbb{Z}^+$ opfylder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

Vælg $y = x$

$$\frac{x}{y} = 1 \leq z, \text{ da } z \in \mathbb{Z}^+$$

Her kan y afhænge af x (men ikke af z).

Kan man bytte om på de to $\forall$ i dette eks?

Nej: (og det skyldes det $\exists$, der er imellem dem)

$$\forall z \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall x \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z \quad F$$

For enhver $z \in \mathbb{Z}^+$

Find et $y \in \mathbb{Z}^+$, så

Enhvert $x \in \mathbb{Z}^+$ opfylder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

Eks: $x = z \cdot y + 1 \Rightarrow$

$$\frac{x}{y} = z + \frac{1}{y} > z, \text{ da } y \in \mathbb{Z}^+$$

Her kan y afhænge af z , men ikke af x .

Regler for logiske slutninger (afsnit 1.6)

Mange eksempler på brug og „misbrug“ af reglerne.
Læs dem efter behov.

Tabel 1.6.1: (s. 76)

$$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array} \quad p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \quad (\text{Modus ponens})$$

~~$$\begin{array}{l} \neg p \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$~~

$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array} \quad \neg q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p \quad (\text{Modus tollens})$$

~~$$\begin{array}{l} q \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore p \end{array}$$~~

$$\begin{array}{l}
 p \Rightarrow q \\
 q \Rightarrow r \\
 \hline
 \therefore p \Rightarrow r
 \end{array}$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

(Hypothetisk syllogisme)

$$\begin{array}{l}
 p \vee q \\
 \neg p \\
 \hline
 \therefore q
 \end{array}$$

$$(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$$

(Disjunktiv syllogisme)

⋮

1 dag:

Bevismetoder (afsnit 1.7)

Hovedtyper:

Direkte bevis

Benyt, at $(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

n ulige $\nearrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k+1$ $\nearrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ $\nearrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ $\nearrow$ n^2 ulige

Kontrapositions bevis

Benyt, at $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

n^2 ulige $\nearrow$ p $\nearrow$ n ulige $\nearrow$ q $\nwarrow$ n lige $\nwarrow$ $\neg q$ $\nwarrow$ n^2 lige $\nwarrow$ $\neg p$

Modstridsbevis

Benyt, at $(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow p$

$\neg \exists$ uge med ≥ 2 fødselsdage $\searrow$ ≤ 52 personer $\searrow$ $\exists$ uge med ≥ 2 fødselsdage

A ridder $\nearrow$ $\neg p$ $\nearrow$ F $\nearrow$ p $\nwarrow$ A knægt

A ridder $\wedge$ A knægt

Induktionsbeviser (kapitel 5)

Eks: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$

I de første eksempler skal vi bruge flg. def.

Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder

$$n \text{ lige} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k$$

$$n \text{ ulige} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k+1$$

(Def. 1.7.1)

Two heltal har samme paritet, hvis begge er lige, eller begge er ulige

Eks 1.7.1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder
 $n \text{ ulige} \Rightarrow n^2 \text{ ulige}$

Beris: (Direkte beris)

Def. 1.7.1 $\Downarrow$ $n \text{ ulige}$
 $\Downarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k+1$

$$\Downarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$$

Def. 1.7.1 $\Downarrow n^2 \text{ ulige}$

□

Eks 1.7.9: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder
 n^2 ulige $\Rightarrow n$ ulige

Kan vi bruge et direkte bevis igen?

Ikke umiddelbart:

$$n^2 = 2k+1 \Rightarrow n = \sqrt{2k+1} \Rightarrow ??$$

Hvis vi bruger kontraposition, får vi n i antagelsen og n^2 i konklusionen ligesom i Eks. 1.7.1 ovenfor.

Bevis: (Kontraposition)

$$\begin{aligned} & \neg(n \text{ ulige}) \\ & \Downarrow \\ & n \text{ lige} \\ & \Downarrow \\ & \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k \\ & \Downarrow \\ & \exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}} \\ & \Downarrow \\ & n^2 \text{ er lige} \\ & \Downarrow \\ & \neg(n^2 \text{ er ulige}) \end{aligned}$$

□

Eks 1 og 9 viser tilsammen, at

$$\forall n \in \mathbb{Z}: n \text{ ulige} \Leftrightarrow n^2 \text{ ulige}$$

Eks: Der er to personer i dette lokale, der har fødselsdag i samme uge.

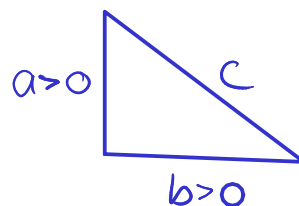
Bevis:

Antag til **modstrid**, at der ikke er nogen uge med to fødselsdage.

Da er der ≤ 52 personer i lokaleret $\downarrow$ $\square$

NB: „to fødselsdage“ betyder „mindst to fødselsdage“.
(I modsætning til „præcis to fødselsdage“.)

Eks: For enhver retvinklet trekant gælder $c < a+b$



Bevis:

Antag til **modstrid**, at der eksisterer en retvinklet trekant med $c \geq a+b$.

$$\begin{aligned} c &\geq a+b \\ \Downarrow \\ c^2 &\geq (a+b)^2 \\ \hat{=} \\ c^2 &\geq a^2 + b^2 + 2ab \\ \Downarrow \\ c^2 &> a^2 + b^2, \text{ da } 2ab > 0 \end{aligned}$$

$\downarrow$

Modstrid med Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

$\square$

Yderligere "tricks": (Afsnit 1.8)

Split op

Eks: (delresultater)

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p), \text{ som i Eks 1+8}$$

$$(p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow p_1) \quad \begin{array}{l} \text{kan bruges i} \\ \text{opg. 1.8.43} \\ \text{til næste uge} \end{array}$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \quad \begin{array}{l} \text{vender vi tilbage til} \\ \text{i næste uge} \end{array}$$

Eks: (flere tilfælde)

Påstand: $\forall n \in \mathbb{Z} : \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \geq \frac{n}{2}$

NB: $\lfloor \rfloor$ runds ned
 $\lceil \rceil$ runds op

Bevis: (to direkte beviser)

Tilfælde 1: n ulige

| dette tilfælde er $n+1$ lige.

D.v.s. $\frac{n+1}{2}$ er et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}$$

Tilfælde 2: n lige

| dette tilfælde er $\frac{n}{2}$ et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$$

□