

Sidste gang:

Bevis-strategier: Opnå forståelse gennem simple specialtilfælde

Terminologi:

(Ikke-)konstruktiv eksistensbevis

Unik løsning

Sætning, lemma, korollar

Induktionsbevis:

Eks: $\underbrace{2^0 + 2^1 + \dots + 2^n}_{P(n)} = 2^{n+1} - 1, \text{ for alle } n \in \mathbb{N}$

Bevis:

Basis: ($n=0$)

$$2^0 = 1$$

$$2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Induktionsskridt: For $k \geq 0$ gælder:

$$\Downarrow \quad 2^0 + 2^1 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1 \quad (\text{induktionsantagelse})$$

$$\Downarrow \quad 2^0 + 2^1 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{k+2} - 1$$

□

I induktionsskridtet viste vi, at

$$P(k) \Rightarrow P(k+1), \text{ for alle } k \geq 0$$

Sidste gang viste vi, at

$$P(k-1) \Rightarrow P(k), \text{ for alle } k \geq 1$$

Begge dele svarer til

$$P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow \dots$$

Eks: $2^n < n!$, for alle $n \geq 4$.

Bevis:

Basis: ($n=4$)

$$2^4 = 16 < 24 = 4!$$

Induktionsantagelse: $2^k < k!$, $k \geq 4$

Induktionsskridt: For $k \geq 4$ gælder

(lidt anderledes end sidst:)

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$$

$$< 2 \cdot k!, \text{ ifølge ind. ant.}$$

$$< (k+1) \cdot k!, \text{ da } k > 1$$

$$= (k+1)!$$

1 dag:

Simple induktion - afrunding

Mængder (Afsnit 2.1-2.2)

„Eks 15“: Alle æbler har samme farve.

„Bevis“: Induktion over $n = \# \text{æbler}$

Basis: ($n=1$)

Ethvert æble har samme farve som sig selv.

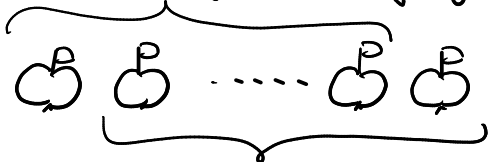
Ind. ant.: ($k \geq 2$)

I enhver skål med $k-1$ æbler har alle æblerne samme farve.

Ind. skridt: $k \geq 3$

Stil k æbler op på række:

Samme farve ifølge ind. ant.



Samme farve ifølge ind. ant.

D.v.s. det første æble har samme farve som de næste $k-2$ æbler, som igen har samme farve som det sidste æble.

Altså har alle k æbler samme farve. $\square$

Bemærk: Argumentet i ind. skridtet fungerer ikke for $k=2$:



D.v.s. vi har vist

$P(1)$ og

$P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$

men ikke

$P(1) \Rightarrow P(2)$

Da $P(2)$ (selvfølgelig) ikke er sand, har vi ikke meget glæde af at vide, at $P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$

Mængder: Afsnit 2.1-2.2

Def. 2.1.1:

En **mængde** er en uordnet samling af objekter, kaldet **elementer** eller **medlemmer**

$x \in A$ betyder, at x er et element i mængden A

$x \notin A$ betyder, at x ikke er et element i mængden A

Eks: $A = \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 1, 1, 2, 3\}$
 $V = \{a, e, i, o, u, y\}$
 $B = \{1, \{2, 4\}, a\}$ } **opremsning**
(enumeration)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{L} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \mid x\}$$

„hvorum der gælder“
„går op i“

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k\}$$

$$= \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

**uendelig
opremsning**

**mængde-bygger-
notation**

(set builder
notation)

Mængde-bygger-notation: $\{ \langle \text{element} \rangle [\in \langle \text{univers} \rangle] \mid \langle \text{udsagn} \rangle \}$

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

$$\{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$\{\} = \emptyset$ Den tomme mængde

Def 2.1.4:

$|S|$: kardinaliteten af mængden S
#elementer i S , hvis S er endelig

I DM549, MM537, MM540 skal vi senere se på kardinalitet af uendelige mængder.

Eks:

$$|\{2, 4, 6\}| = 3 = |\{2, 2, 4, 6, 4\}|$$

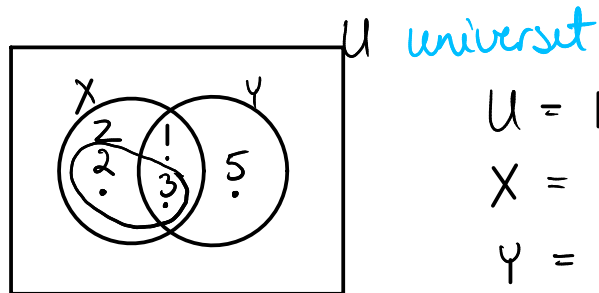
$$|\{2, \{3, 4\}, 5\}| = 3$$

$$|\{\}| = 0$$

$$|\{\mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}^+\}| = 2$$

Venn-diagram

Eks:



$$U = \mathbb{N}$$

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$Y = \{1, 3, 5\}$$

$$Z = \{2, 3\}$$

$$Z \subseteq X$$

Def 2.1.3: Delmængde (Subset)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U : x \in A \Rightarrow x \in B$$

„A er en delmængde af B”

„A er indeholdt i B”

Eks: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{X}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\{1, 2\} \subseteq \mathbb{N}$, $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

Sætning 2.1.1:

For enhver mængde A gælder:

- $A \subseteq A$, fordi

$$\forall x \in A : x \in A$$

- $\emptyset \subseteq A$, fordi

$$\forall x \in \emptyset : x \in A \quad \text{eller}$$

$$\forall x \in U : (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

Egte delmængde (proper subset)

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B \wedge \exists x \in B : x \notin A$$

Eks: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{X}$, $\emptyset \subset \mathbb{Z}$, $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$