

Sidste gang:

Induktionsbeviser

Bevis $P(n)$, for $n \geq m$

Eks. på gyldig struktur:

$$P(m)$$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1), \text{ for } k \geq m$$

$$P(m)$$

$$P(k-1) \Rightarrow P(k), \text{ for } k \geq m+1$$

Begge eks. svarer til

$$P(m)$$

$$P(m) \Rightarrow P(m+1) \Rightarrow P(m+2) \Rightarrow \dots$$

Eks. på ikke gyldig struktur:

$$P(m)$$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1), \text{ for } k \geq m+1$$

Dette svarer til

$$P(m)$$

$$P(m+1) \Rightarrow P(m+2) \Rightarrow P(m+3) \Rightarrow \dots$$

Mængder

Repræsentation

Opremsning

Mængde-bygger - notation

Venn-diagram

Kardinalitet

(Ægte) delmængde

1 dag:

Potensmængde (Afsnit 2.1)

#delmængder (Afsnit 5.1)

Mængde-operationer : $\cup$ $\cap$ $-$ c (Afsnit 2.2)

Funktioner (Afsnit 2.3)

Def. 2.1.6: Potenzmenge

(Power set)

$$\mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$$

Ex:

$$A = \emptyset$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$$

$$B = \{1\}$$

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$C = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$D = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$$

$$|\mathcal{P}(B)| = 2 = 2^1$$

$$|\mathcal{P}(C)| = 4 = 2^2$$

$$|\mathcal{P}(D)| = 8 = 2^3$$

Eks 5.1.10: En mængde S med n elementer har 2^n delmængder, for alle $n \geq 0$

D.v.s.

$$|S| = n \Rightarrow |P(S)| = 2^n$$

Basis: Ved induktion over n

Basis: $n=0$

$\emptyset$ har 1 delmængde, nemlig $\emptyset$.

Ind. ant.:

En mængde med $n-1$ elementer har 2^{n-1} delmængder

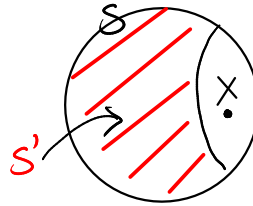
Ind. skridt: $n \geq 1$

Lad S være en vilkårlig mængde med n elementer.

Lad $x \in S$.

Lad $S' = S - \{x\}$.

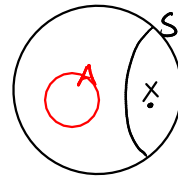
D.v.s. $|S'| = n-1$



S' har 2^{n-1} delmængder ifølge ind. ant.

For enhver delmængde $A \subseteq S$ er der to muligheder:

- $x \notin A$, dvs. $A \subseteq S'$
(2^{n-1} muligheder)



- $x \in A$, dvs. $A = \{x\} \cup A'$, hvor $A' \subseteq S'$
(2^{n-1} muligheder)



I alt $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ muligheder

□

Def 2.1.8: Kartesisk produkt

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

D.v.s. $A \times B$ er en mængde af 2-tupler

Eks: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$

$$A \times B = \{ (1,2), (1,3), (2,2), (2,3) \}$$

$$\text{NB: } A \times B \neq B \times A$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Afsnit 2.2: Mængde-operationer

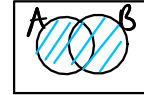
Eks: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Foreningsmængde (union)

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

„forenet med“

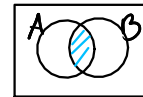


Fællesmængde / snitmængde (intersection)

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

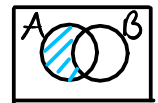
„fælles med“



$$A - B = \{1\}$$

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

„fraregnet“



$$\bar{A} = \{4, 5\}$$

Komplement af A: $\bar{A} = U - A$



(disjoint)

$$\begin{aligned} A \text{ og } B \text{ er disjunkte} &\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \\ &\Leftrightarrow A - B = A \\ &\Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \end{aligned}$$

Tabel 2.2.1: Mængde-love

Tabel 2.2.1 $\sim$ Tabel 1.3.6
(S. 136) (S. 29)

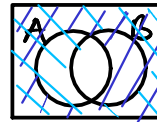
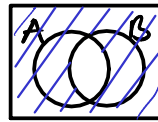
$$\cup \sim \vee$$

$$\cap \sim \wedge$$

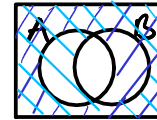
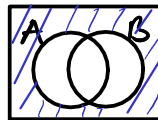
$$\overline{} \sim \neg$$

De Morgans Love:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



I bogen bevises love fra Tabel 2.2.1 v.h.a. omskrivninger og v.h.a. membership tables. Som regel er det nemmest at bruge Venn-diagrammer (som ovenfor).

Lidt notation:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$