

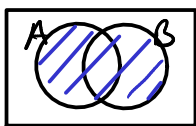
Sidste gang

Mængder

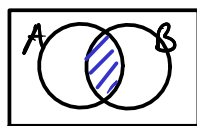
$$\mathcal{P}(S) = \{ A \mid A \subseteq S \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$$

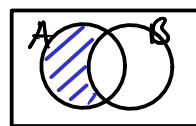
Kartesiske produkt : $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$



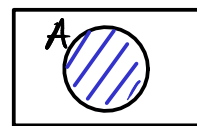
$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B$



$\bar{A}$

Tabel 2.2.1 $\sim$ Tabel 1.3.6

1 dag:

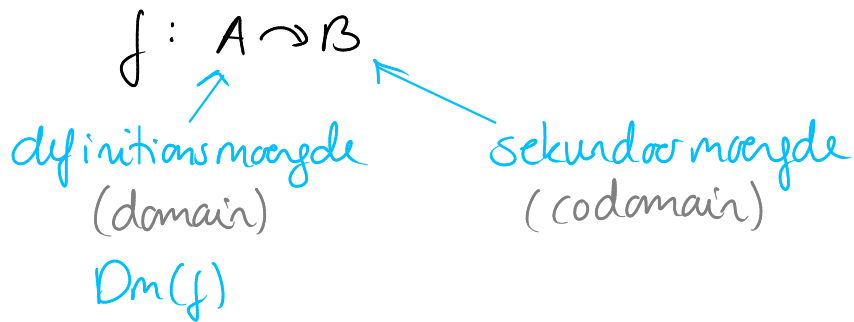
Funktioner (Afsnit 2.3)

Rekursive definitioner (Afsnit 5.3)

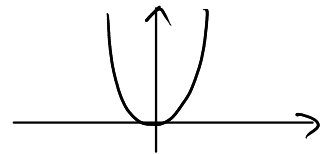
Stærk induktion (Afsnit 5.2)

Funktioner (afsnit 2.3)

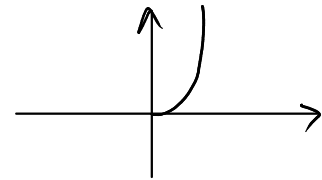
Def. 1+2:



Eks: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

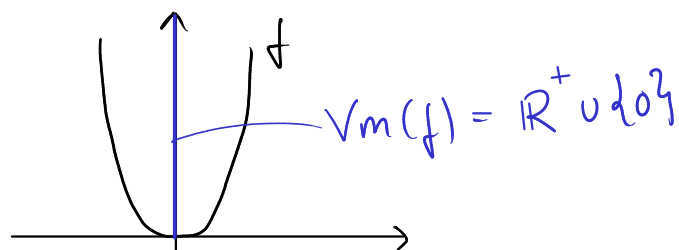


Eks: $g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
 $g(x) = x^2$



Værdimængde / billed mængde (image / range)

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ V_m(f) &= f(A) \\ &= \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \\ &= \{f(x) \mid x \in A\} \end{aligned}$$



f er ikke injektiv (en-til-en). (Def. 5)

Eks: $f(-1) = f(1)$

f er ikke surjektiv (på), (Def. 7)

da $\forall m(f) \neq \mathbb{R}$

← f 's sekundærmængde

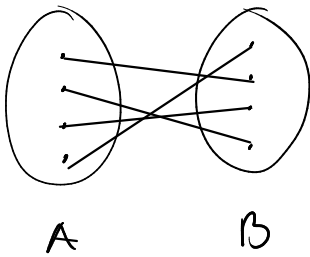
g er både injektiv og surjektiv.

D.v.s. g er bijektiv.

Def. 8:

Bijektiv: injektiv og surjektiv

Bijektion/en-til-en-korrespondance: funktion, som er bijektiv



$$f: A \rightarrow B$$

$$\forall y \in B: \exists ! x \in A: f(x) = y.$$

Altså:

sekundærmængde

def.mængde

Injektiv: Hver y -værdi „rammes“ af højest en x -værdi

Surjektiv: Hver y -værdi „rammes“ af mindst en x -værdi

Bijektiv: Hver y -værdi „rammes“ af præcis en x -værdi.

D.v.s. g er bijektiv, men f er ikke.

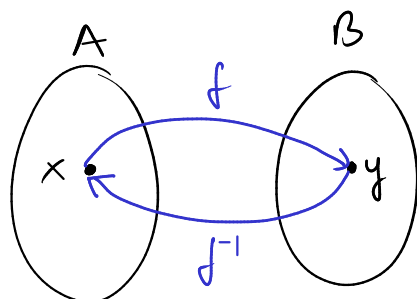
Hvis en funktion er bijektiv, er den også invertibel.

D.v.s. den har en invers:

Def. 9:

Lad $f: A \rightarrow B$ være en bijektion.

Den inverse funktion til f er funktionen $f^{-1}: B \rightarrow A$, som opfylder $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, for alle $x \in A$.



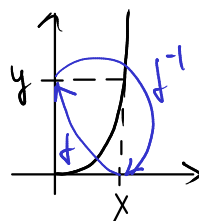
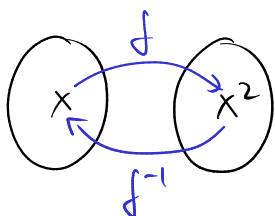
D.v.s. $f^{-1}(f(x)) = x$, for alle $x \in A$,
og $f(f^{-1}(y)) = y$, for alle $y \in B$.

Eks: $g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $g(x) = x^2$

$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}, \text{ for alle } x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

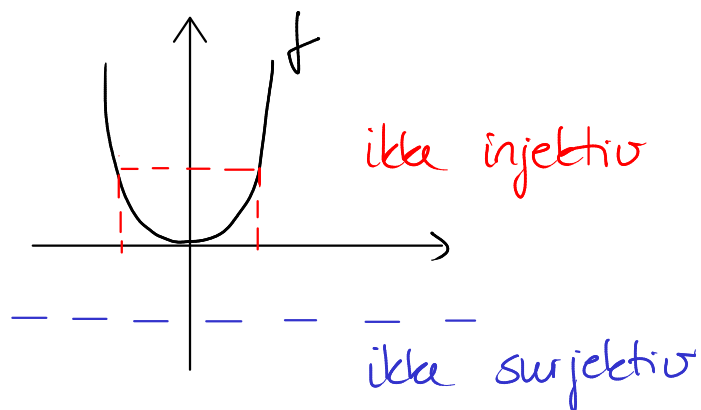
D.v.s.:

$$g^{-1}: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad g^{-1}(x) = \sqrt{x} :$$



$$\begin{aligned} \text{Check: } f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x \\ f(f^{-1}(x)) &= f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x \end{aligned}$$

Eks: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
 f er ikke invertibel.



Eks: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2x+1$

$$y = 2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

D.v.s. $h^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

Check: $h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(2x+1) = \frac{2x+1-1}{2} = x$.

Man kan kombinere funktioner (se Sowiso/lærebogen Def 10):

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad (\text{sammensat funktion})$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

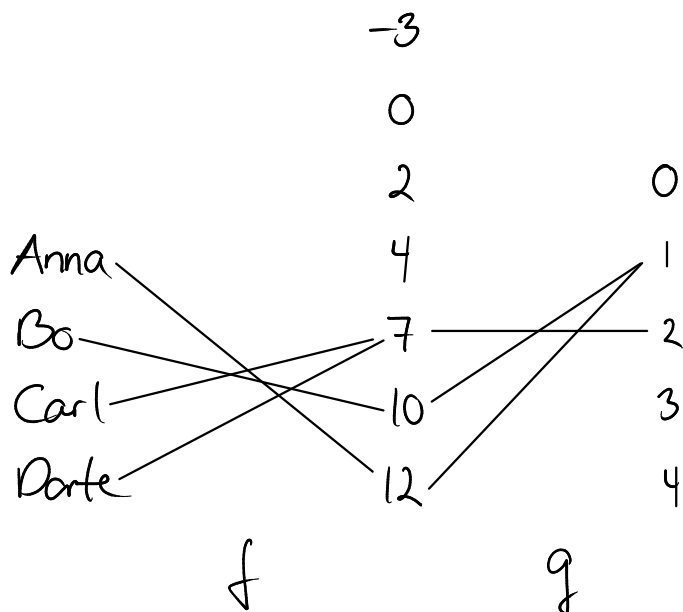
Eks: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x^2$
 $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad g(x) = 2x+1$

Da f 's sekundærmænde er lig $D_m(g)$,
og g 's sekundærmænde er lig $D_m(f)$,
er både $f \circ g$ og $g \circ f$ defineret, men
 $f \circ g \neq g \circ f$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$$

Eks: f : navn $\rightarrow$ karakter
 g : karakter $\rightarrow$ antal



Hvor mange fik
samme karakter
som Dorte?

$$(g \circ f)(Dorte) =$$

$$g(f(Dorte)) =$$

$$g(12) = 4$$

Bemærk:

f og g er ikke def.
 $(\text{Dom}(f) \neq \text{Vm}(g))$.

Funktioner kan være (se SoWiSo / lærebogen Def. 6)

Voksende:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Strengt voksende:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Aftagende:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Strengt aftagende:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Monoton:

Enten voksende eller aftagende

Rekursive definitioner (Afsnit 5.3)

Eks:

Fibonacci-tallene

$$\left. \begin{array}{l} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{array} \right\} \text{Basis-skridt}$$
$$\left. f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \right\} \text{Rekursivt skridt}$$

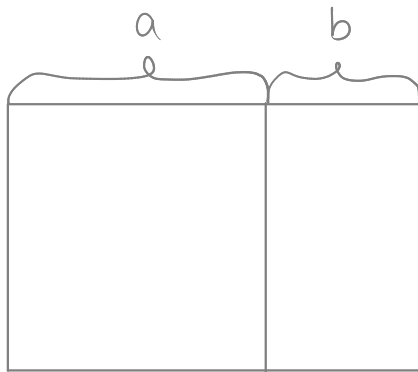
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Vokser eksponentielt:

Eks. 5.3.4: $f_n > \varphi^{n-2}, \quad n \geq 3$, hvor

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \quad (\text{Golden ratio})$$

Gyldne snit:



$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a} &= \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} &= \varphi \end{aligned}$$

φ har mange interessante egenskaber.
En af dem skal vi bruge om lidt:

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi \quad (*) \end{aligned}$$

Basis {

- $f_3 = 2$
 $\varphi^{3-2} = \varphi \approx 1,618 < f_3$ - OK!
- $f_4 = 3$
 $\varphi^{4-2} = \varphi^2 = 1 + \varphi \approx 2,618 < f_4$ - OK!
- $f_5 = f_4 + f_3$
 $> \varphi^2 + \varphi$ (bevist ovenfor)
 $= \varphi(\varphi + 1)$
 $= \varphi \cdot \varphi^2$, iflg. (*)
 $= \varphi^3$

Induktionsantagelse: $f_{k-1} > \varphi^{k-3}$ og $f_k > \varphi^{k-2}$

Induktionsstrid: $k \geq 4$

$$\begin{aligned}
 f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\
 &> \varphi^{k-2} + \varphi^{k-3}, \text{ iflg. ind. ant.} \\
 &= \varphi^{k-3}(\varphi + 1) \\
 &= \varphi^{k-3} \cdot \varphi^2, \text{ iflg. (*)} \\
 &= \varphi^{k-1}
 \end{aligned}$$

Herved har vi bevist uligheden fra Eks. 5.3.4
 v.h.a. stærk induktion. □

Hvis vi lader $P(n)$ være udsagnet $f_n > \varphi^{n-2}$, så er beviset overfor til at bevise:

$$P(3)$$

$$P(4)$$

$$P(3) \wedge P(4) \Rightarrow P(5)$$

$$P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$$

$$P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$$

$\vdots$

Simpel induktion:

$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	
$\frac{P(1) \Rightarrow P(2)}{\therefore P(2)}$	$\frac{P(2) \Rightarrow P(3)}{\therefore P(3)}$	$\frac{P(3) \Rightarrow P(4)}{\therefore P(4)}$	$\dots$

Stærk induktion:

(a) $P(1)$	(b) $P(1) \wedge P(2)$
$\frac{P(1) \Rightarrow P(2)}{\therefore P(1) \wedge P(2)}$	$\frac{\boxed{P(1) \wedge P(2)} \Rightarrow P(3)}{\therefore P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)}$

(c) $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$

$$\frac{P(1) \wedge \boxed{P(2) \wedge P(3)} \Rightarrow P(4)}{\therefore P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)} \dots$$

Man kan starte med (a), (b) eller (c) eller...

Vi startede med (b).

Stærk induktion (Afsnit 5.2)

Mer generel formulering af induktionsprincippet:

Stærk induktion

Bevis $P(n)$, for alle $n \geq m$

Basis: Bevis $P(m), P(m+1), \dots, P(m+l)$, $l \geq 0$

Induktionsskridt: Bevis $P(m) \wedge P(m+1) \wedge \dots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$,
for alle $k \geq m+l$

Eller bevis $P(m) \wedge \dots \wedge P(k-1) \Rightarrow P(k)$, for $k \geq m+l+1$

Eller ...

Eks. overfor: $m=3$, $l=1$

I forbindelse med simpel induktion brugte vi en domino-analogi.

I forbindelse med stærk induktion kan man tænke på en uendeligt høj stige:

I basis-skridtet viser vi, at vi kan nå de $l+1$ nederste trin.

I induktionsskridtet viser vi, at hvis vi kan nå de $k-1$ nederste trin, kan vi også nå det k 'te trin.

Eks: Ethvert heltal $n \geq 4$ kan skrives som en sum af 2-taller og 5-taller.

D.v.s.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 4 : \exists a, b \in \mathbb{N} : \underbrace{n = 2a + 5b}_{P(n)}$$

$$\begin{array}{ll} 4 = 2 \cdot 2 & (a=2, b=0) \\ 5 = 5 \cdot 1 & (a=0, b=1) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 4 \\ 5 \end{array}} \right\} \text{Basis } (n=4, n=5)$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$7 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1$$

$$8 = 2 \cdot 4$$

$$9 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$

$$P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow \dots$$

$$P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow P(9) \Rightarrow \dots$$

Ind.ant: $P(k-2) : \exists a, b \in \mathbb{N} : k-2 = 2a+5b$

Ind.skridt: For $k \geq 6$ gælder:

$$k = k-2+2$$

$$= 2a+5b+2, \text{ hvor } a, b \in \mathbb{N}, \text{ ifølge ind.ant.}$$

$$= 2(a+1)+5b, \text{ hvor } a+1, b \in \mathbb{N}$$

□

Bemærk, at vi er nødt til at behandle både $n=4$ og $n=5$ i basis-skridtet. Hvis vi kun behandler $n=4$, har vi kun bevist udsagnet for lige n -værdier.

Vi har bevist

$$P(4)$$

$$P(5)$$

$$P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$$

$$P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$$

$$P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge P(7) \Rightarrow P(8)$$

$\vdots$

$$m=4, \quad l=1$$