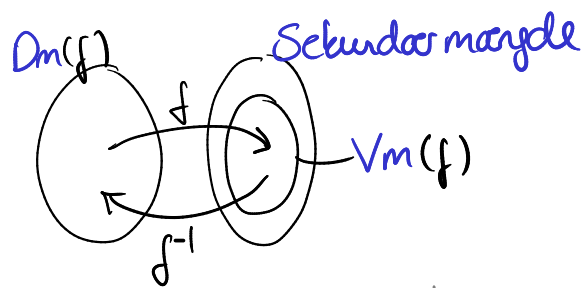


Sidste gang:

Funktioner (Afsnit 2.3)



eksisterer, hvis f er bijektiv

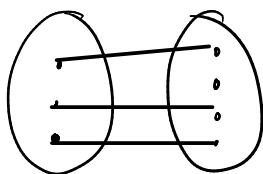
Injektiv (højst en x -værdi per y -værdi)

Surjektiv (mindst en x -værdi per y -værdi)

Bijektiv (præcis en x -værdi per y -værdi, d.v.s. injektiv og surjektiv)

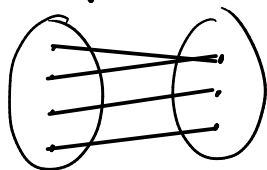
Injektiv

Ikke surjektiv

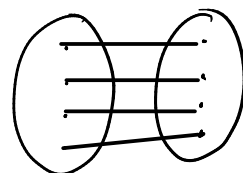


Ikke injektiv

Surjektiv



Bijektiv



Invers: $f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$

Kombinationer: $f \circ g$, $f \cdot g$, $f + g$

(Strengt) voksende, (strengt) aftagende, monoton

↑
for kontinuerte funktioner: nødvendig,
men ikke tilstrækkelig
betingelse for injektiv

Rekursive definitioner (Afsnit 5.3)

Eks: Fibonacci-tallene

$$\left. \begin{array}{l} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{array} \right\} \text{Basisstidt}$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad \left. \right\} \text{Rekursivt skidt}$$

Stærk induktion (Afsnit 5.2)

Beris for $P(n)$, $n \geq m$:

Basis: $P(m), P(m+1), \dots, P(m+l)$, $l \geq 0$

Induktionsstidt:

$$P(m) \wedge P(m+1) \wedge \dots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1), \quad k \geq m+l$$

Eks: $f_n \geq \varphi^{n-2}$, $n \geq 3$ ($\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$)

Basis: $P(3), P(4)$

Ind. skidt: $P(k-1) \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $k \geq 4$

Eks: Ethvert heltal $n \geq 4$ kan skrives som en sum af 2-taller og 5-taller

Basis: $P(4), P(5)$

Ind. skidt: $P(k-2) \Rightarrow P(k)$, $k \geq 6$

Relationer (Kapitel 9)

Beskriver en sammenhæng ml. elementer i en eller flere mængder.

Bruges f.eks. i databaser.

Eks:

(studie-nr., navn, adresse, uddannelse) kvartet relation

(studie-nr, kursus)

$<, =, |, \text{"er barn af"}$

} binære relationer

Vi skal kun beskæftige os med binære relationer:

Def 9.1.1

A, B : mængder

En relation fra A til B er en delmængde af $A \times B$

Eks. overfor:

A : mængde af studie-nr, B : mængde af kurser

eller

$A = B = \mathbb{Z}$

eller...

Eks: (Relation fra $\mathbb{Z}^+$ til $\mathbb{R}^+$)

$$R_{inv} = \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid b = \frac{1}{a} \}$$
$$= \{ (1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), \dots \}$$

NB: $(2, \frac{1}{2}) \in R_{inv}$, men
 $(\frac{1}{2}, 2) \notin R_{inv}$, da $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$

$(a, b) \in R$ skrives også

$a R b$ og læses

„a er relateret til b gennem R“

↑
rækkefølgen har betydning
(medmindre R er symmetrisk)

$(a, b) \notin R$ skrives også

$a \not R b$

Eks: $5 R_{inv} \frac{1}{5}$, men $6 \not R_{inv} \frac{1}{5}$

$5 = 5$, men $5 \neq 6$

Eks: $R_< = \{ (a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid a < b \}$
 $= \{ (1,2), (1,3), (2,3), (1,4), \dots \}$

Relationer er en generalisering af funktioner:

$f: A \rightarrow B$ knytter ét element fra B til hvert element i A .
 En relation fra A til B knytter 0, 1 eller flere elementer fra B til hvert element i A .

Eks: $R_{abs} = \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| = |b| \}$
 $= \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a=b \vee a=-b \}$
 $= \{ (0,0), (1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1), (2,2), \dots \}$

Def. 9.1.2

A : mængde

En relation på A er en relation fra A til A ,
 d.v.s. er delmængde af $A \times A$

Fra nu af kun denne slags relationer.

Eks: $R_<$ er en relation på $\mathbb{Z}^+$
 R_{abs} er en relation på $\mathbb{Z}$

Repræsentationer af relationer (afsnit 9.3)

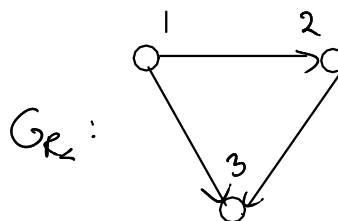
Man kan repr. rel. u.h.a.

- Opremsning
- Mængde-byggeset notation
- Matricer (Hvis A, B endelige)
- Orienterede grafer (Hvis $A=B$ og A endelig)
(digraphs)

Eks: $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_< = \{(a,b) \in A \times A \mid a < b\} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

$$M_{R_<} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Eks: R_p relation på $\{1, 2, 3, 4\}$

$$R_p = \{(a,b) \mid a \text{ og } b \text{ har samme paritet}\}$$

$$= \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Egenskaber

Def. 9.1.3

R : relation på A

R er **refleksiv**, hvis

$(a,a) \in R$, for alle $a \in A$

Eks:

✓: $\leq$, $=$, $|$

✗: $<$, $\neq$

Hvordan ser man på matrix-repr., om rel. er refl.?
graf -

Def. 9.1.4

R : relation på A

R er **symmetrisk**, hvis

$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$, for alle $a,b \in A$

Eks:

✓: Samme paritet, $=$, $|\cdot|$, $\neq$

✗: $<$, $\leq$, $|$, R

Hvordan ser man på matrix-repr., om rel. er symm.?
graf -

Lukninger (afsnit 9.4)

R : relation på A

Den **refleksive lukning** af R er

$$r(R) = R \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$$

D.v.s. den refleksive lukning skabes ved at tilføje præcis de elementer, der mangler for, at R er refleksiv.

Eks:

$$\begin{aligned} r(R_<) &= \{(a,b) \mid a < b\} \cup \{(a,b) \mid a = b\} \\ &= \{(a,b) \mid a < b \vee a = b\} \\ &= \{(a,b) \mid a \leq b\} \\ &= R_{\leq} \end{aligned}$$

Eks:

$$\begin{aligned} R &= \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3)\} \text{ på } \{1,2,3,4\} \\ r(R) &= \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,4)\} \end{aligned}$$

Mere genvelt:

Def. 9.4.1

R : relation, P : egenskab

Lukningen af R mht. P (hvis den er defineret) er den mængde S , som opfylder

- $R \subseteq S$
- S har egenskaben P
- $S \subseteq T$, for enhver relation $T \supseteq R$ med egenskaben P (dvs. S er minimal)

D.v.s. S er den mindste mængde, som indeholder R og har egenskaben P .

D.v.s.

Den symmetriske lukning af en relation R er

$$S(R) = R \cup \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

Eks:

$$S(R_<) = R_< \cup R_> = R_{\neq}$$

$$S(R_{\leq}) = R_{\leq} \cup R_{\geq} = A \times A$$

$$S(\text{"samme paritet"}) = \text{"samme paritet"}$$

$$\begin{aligned} S(R) &= R \cup \{(3,2)\} \\ &= \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\} \end{aligned}$$

Def. 9.1.4

R : relation på A

R er **antisymmetrisk**, hvis

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b, \text{ for alle } a,b \in A$$

$\Leftrightarrow$

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \vee a=b$$

$\Leftrightarrow$

$$(a,b) \in R \wedge a \neq b \Rightarrow (b,a) \notin R$$

Eks:

Anti-symmetrisk: $<, \leq, =, |$

Symmetrisk: $=$, samme paritet

Ingen af delene: $\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3)\}$

Antisymmetrisk lukning? Findes ikke

Man kan ikke gøre en relation antisymmetrisk ved at tilføje elementer.

Def. 9.1.5

R : relation på A

R er **transitiv**, hvis

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R, \text{ for alle } a,b,c \in A$$

Eks:

✓: $\leq, <, =, | \cdot |, |$

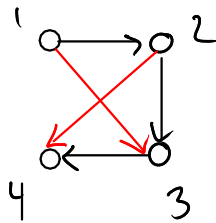
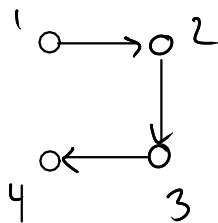
✗: $\neq, S = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

Eks: $S = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

Den transitive lukning af S er:

$$\begin{aligned} t(S) &= S \cup \underbrace{\{ (1,3), (2,4) \}}_{S \circ S = S^2} \cup \underbrace{\{ (1,4) \}}_{S \circ S \circ S = S \circ S^2 = S^2 \circ S = S^3} \\ &= \{ (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) \} \end{aligned}$$

G_S :



$G_{t(S)}$:

