

Sidste gang

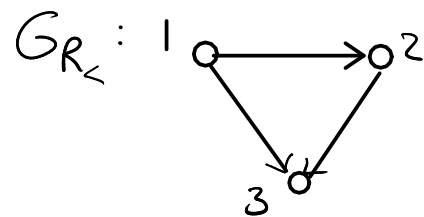
Relationer

Eks:

$R_<$: relation på $\{1, 2, 3\}$

$$R_< = \{ (a, b) \mid a < b \} \\ = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3) \}$$

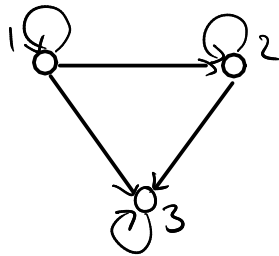
$$M_{R_<} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$R_<$ er antisymmetrisk og transitiv.

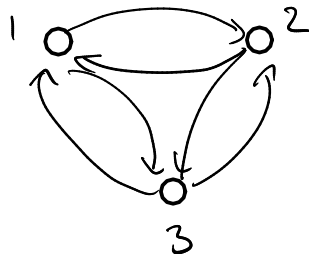
Refleksive lukning af $R_<$:

$$r(R_<) = R_< \cup \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \} = R_< \cup I_3$$



Symmetriske lukning af $R_<$:

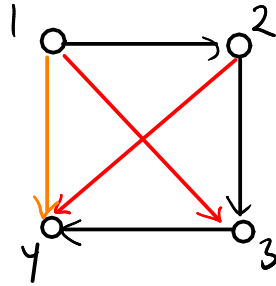
$$s(R_<) = R_< \cup \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2) \} = R_< \cup R_<^{-1}$$



Eks: $R = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

Transitive lukning af R :

$$t(R) = R \cup \underbrace{\{(1,3), (2,4)\}}_{R^2} \cup \underbrace{\{(1,4)\}}_{R^3}$$



1 dag

Kombinationer af relationer (Afsnit 9.1)

Ækvivalensrelationer (Afsnit 9.5)

Partielle ordninger (Afsnit 9.6)

Kombinationer af relationer

Relationer er mængder, og kan kombineres v.h.a. mængde-operationer: $\cup, \cap, -, \oplus$ (se Eks. 9.1.17-19)

Relationer er også en generalisering af funktioner, og kan sættes sammen, præcis som funktioner:

Def. 9.1.6:

R : relation fra A til B

S : relation fra B til C

$$S \circ R = \{ (a, c) \mid \exists b : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S \}$$

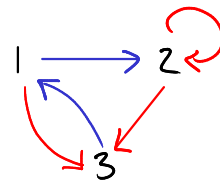
Eks.:

$$R = \{ (1, 2), (3, 1) \}$$

$$S = \{ (1, 3), (2, 2), (2, 3) \}$$

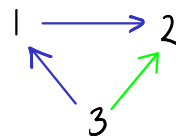
$$S \circ R = \{ (1, 2), (1, 3), (3, 3) \}$$

$$R \circ S = \{ (1, 1), (2, 1) \}$$



$$R^2 = R \circ R = \{ (3, 2) \}$$

$$R^3 = R \circ R^2 = R^2 \circ R = \{ \}$$



Bemærk:

$$(a, b) \in R^k \Leftrightarrow \exists \text{ vej af længde } k \text{ i } G_R$$

$$R^* = R \cup R^2 = \{ (1, 2), (3, 1), (3, 2) \}, \text{ fordi:}$$

Def. 9.4.3	$R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$
------------	---

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{|A|} R^i, \text{ hvis } A \text{ er endelig, fordi:}$$

Hvis der er en vej fra a til b , er der en vej fra a til b af længde højst $|A|$.

Sætning 9.4.2

Den transitive lukning af en relation R er $t(R) = R^*$
--

Ækvivalensrelationer (afsnit 9.5)

Def 9.5.1

En relation, som er reflektiv, symmetrisk og transitiv, kaldes en ækvivalensrelation

Eks:

✓: =, samme paritet

✗: $\leq$, $|$, $\neq$

Def. 9.5.2:

Hvis R er en ækv.rel., og $(a,b) \in R$, kaldes a og b ækvivalente

Def 9.5.3

Lad R være en ækv.rel. på A , og lad $a \in A$.
Da er a 's ækvivalensklasse

$$[a]_R = \{b \mid (a,b) \in R\}$$

$$= \{b \mid (b,a) \in R\}$$

Eks: $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ og } b \text{ har samme paritet}\}$

$$[0]_R = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$[1]_R = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$[2]_R = [0]_R = [4]_R = \dots$$

$$[3]_R = [1]_R = [5]_R = \dots$$

Bemærk: $[0]_R \dot{\cup} [1]_R = \mathbb{N}$ ($\dot{\cup}$: disjunkt forening)

Eks: $S = \{(a,b) \mid a=b\}$ på $\mathbb{N}$

$$[0] = \{0\}$$

$$[1] = \{1\}$$

$$[2] = \{2\}$$

$\vdots$

$$\text{Igen: } \mathbb{N} = [0] \dot{\cup} [1] \dot{\cup} [2] \dot{\cup} \dots$$

Øøthning 9.5.1:

Lad R være en ækv. rel på A .

Da gælder

$$\uparrow aRb \quad (i)$$

$$\Downarrow [a]_R = [b]_R \quad (ii)$$

$$\Downarrow [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \quad (iii)$$

Beris

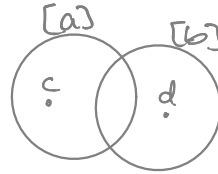
Vil berise $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$

$$\underline{aRb \Rightarrow [a] = [b]} : \quad ((i) \Rightarrow (ii))$$

Antag, aRb .

Da gælder også bRa , da R er **symmetrisk**

Kunne man forestille sig:



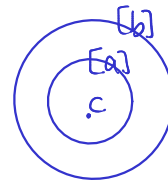
Nej:

$$\underline{[a] \subseteq [b]} :$$

$c \in [a]$
 $\Updownarrow$ aRc , per def.

$\Downarrow$ bRc , da bRa og R er **transitiv**

$\Updownarrow$ $c \in [b]$ per def.



$$\underline{[b] \subseteq [a]} :$$

Helt tilsvarende:

$d \in [b]$
 $\Updownarrow$ bRd , per def.

$\Downarrow$ aRd , da aRb og R er **transitiv**

$\Updownarrow$ $d \in [a]$



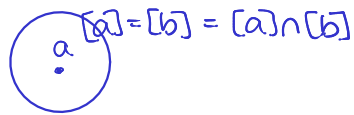
$$\text{O.v.s. } [a] = [b]$$

$$\underline{[a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset : \quad ((i) \Rightarrow (ii))}$$

$$\Downarrow [a] = [b]$$

$$\Downarrow [a] \cap [b] = [a]$$

$$\Downarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset, \text{ da } a \in [a], \text{ fordi } R \text{ er } \text{refleksiv}$$



$$\underline{[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow aRb : \quad ((ii) \Rightarrow (i))}$$

$$\Updownarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$$\Updownarrow \exists c : aRc \wedge bRc$$

$$\Updownarrow \exists c : aRc \wedge cRb, \text{ da } R \text{ er } \text{symmetrisk}$$

$$\Updownarrow aRb, \text{ da } R \text{ er } \text{transitiv}$$

