

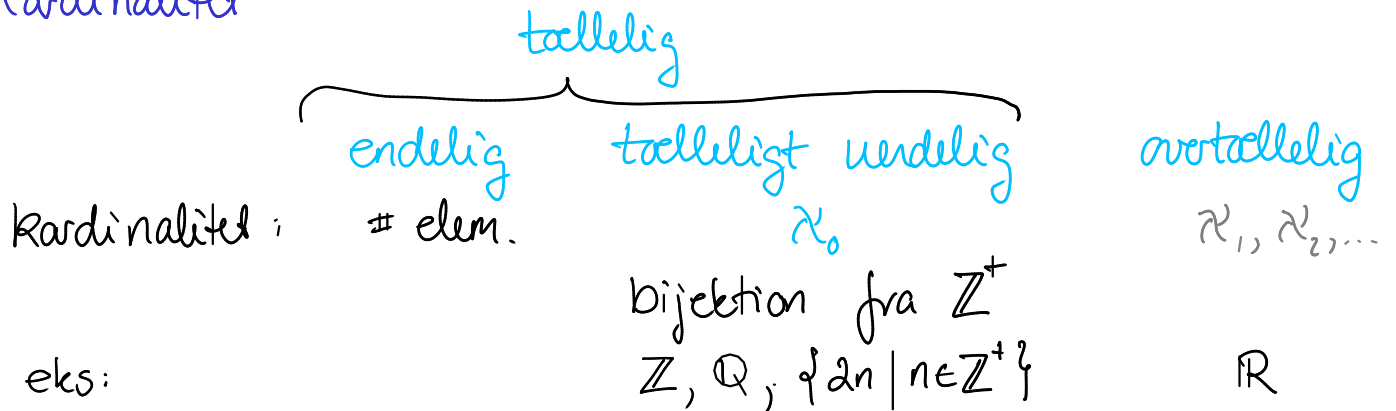
Sidste gang

Kongruenser

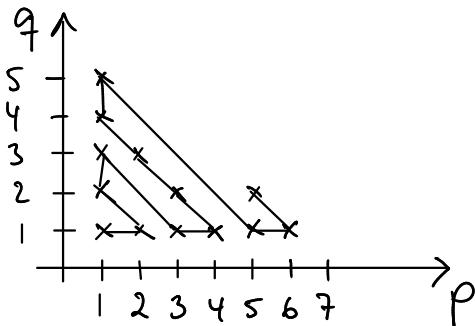
Man må dividere med c på begge sider,
hvis divisionen går op, og c er indbyrdes primisk
med modulus:

$$\begin{aligned} 36 &\equiv 21 \pmod{5} \\ \Downarrow \\ 12 &\equiv 7 \pmod{5} \end{aligned} \quad \gcd(3, 5) = 1$$

Kardinalitet



$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ er tællelig:



$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 5, 6, \frac{5}{2}, \dots$

$\mathbb{R}$ er overtællig:

Diagonalisering:

Lige gyldigt hvordan vi forsøger at oprense tallene i $\mathbb{R}$, vil der være et reelt tal, som ikke har en plads i oprensningsen:

$$0, d_{11} d_{12} d_{13} d_{14} \dots$$

$$0, d_{21} d_{22} d_{23} d_{24} \dots$$

$$0, d_{31} d_{32} d_{33} d_{34} \dots$$

$$S = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots, \text{ hvor}$$

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{hvis } d_{ii} = 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Eks:

$$0, 10000$$

$$0, 01000$$

$$0, 11000$$

$$0, 00100$$

$$0, 01100$$

$\vdots$

$$S = 0, 00111 \dots$$

Rekursive definitioner og struktural induktion (afsnit 5.3)

I uge 39 så vi, hvordan funktioner kan defineres rekursivt, f.eks. Fibonacci-tallene:

$$\left. \begin{array}{l} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{array} \right\} \text{ basis-skridt}$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad \text{rekursive skridt}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Vi brugte stærk induktion til at bevise, at $f_n > \varphi^{n-2} \approx 1,62^{n-2}$, for $n \geq 3$.

Nu skal vi se på, hvordan mængder kan defineres rekursivt.

Derefter skal vi se, at struktural induktion kan være nyttigt til at bevise egenskaber ved rekursivt definerede mængder.

Eks 5:

$$3 \in S$$

$$x, y \in S \Rightarrow x+y \in S$$

Eller:

$$S_1 = \{3\}$$

$$S_n = S_{n-1} \cup \{x+y \mid x, y \in S_{n-1}\}, \quad n \geq 2$$

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

$$S_1 = \{3\}$$

$$S_2 = \{3\} \cup \{3+3\} = \{3, 6\}$$

$$S_3 = \{3, 6\} \cup \{3+3, 3+6, 6+6\} = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$S_4 = \{3, 6, 9, 12\} \cup \{3+3, 3+6, \dots, 12+9, 12+12\}$$
$$= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$$

$\vdots$

Vi kan bruge struktural induktion til at vise, at alle elementer i S er multipla af 3:

Eks 10:

$$S = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$$

Bevis: Lad $A = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$

$A \subseteq S$: Bevises ved induktion over n :

Skal vise, at $3n \in S$ for alle $n \in \mathbb{Z}^+$

Basis ($n=1$):

$$3 \in S_1 \subseteq S$$

Ind. skridt ($n \geq 2$):

Skal vise, at $3(n-1) \in S \Rightarrow 3n \in S$, for alle $n \geq 2$

$$3n = \underbrace{3(n-1)}_{\in S, \text{ ifølge ind. ant.}} + \underbrace{3}_{\in S_1}$$

D.v.s.

$3n \in S$, ifølge det rek. skridt i def. af S .

$S \subseteq A$: Bevises ved struktural induktion:

Basis (S_1):

$$3 = 3 \cdot 1, \quad 1 \in \mathbb{Z}^+$$

Ind. skridt ($S_n, n \geq 2$):

Skal vise, at $S_{n-1} \subseteq A \Rightarrow S_n \subseteq A$, for alle $n \geq 2$

$\Downarrow$ $s \in S_n - S_{n-1}$, hvor $n \geq 2$

$\Downarrow$ $s = x + y$, hvor $x, y \in S_{n-1}$, ifølge rek. skridt i def.

$\Downarrow$ $s = 3k + 3l$, hvor $k, l \in \mathbb{Z}^+$, ifølge ind. ant.

$$= 3(k+l), \text{ hvor } k+l \in \mathbb{Z}^+$$

$\Downarrow$

$$s \in A$$

□

Struktural induktion:

Bevis $P(S_n)$, for alle $n \geq 1$

Bevis $P(S_1)$

Bevis $P(S_{n-1}) \Rightarrow P(S_n - S_{n-1})$, for alle $n \geq 2$

Def. 5.3.5: Fulde binære træer

$$S_1 = \{\bullet\}$$

(basis skridt)

$$S_n = S_{n-1} \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{rod} \\ \swarrow \quad \searrow \\ T_1 \quad T_2 \\ \swarrow \quad \nwarrow \\ \text{undertræer} \end{array} \mid T_1, T_2 \in S_{n-1} \right\}, n \geq 2$$

(rekursivt skridt)

D.v.s.

$$S_2 = \{\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\}$$

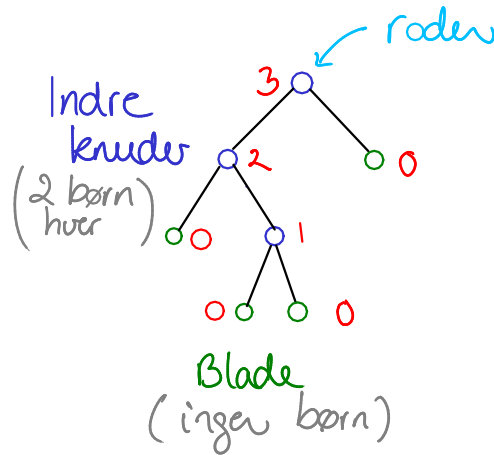
$$S_3 = \{\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \nwarrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \nwarrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \nwarrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\}$$

$$S_4 = \{ \text{---}, \text{---}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \nwarrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \dots \}$$

$$(|S_4| = 26)$$

Lidt terminologi:

○ knude
 \ kant



} højde ($h=3$):
 #kanter på
 længste vej fra
 rod til et blad

Def 5.3.6

$$h(\circ) = 0$$

$$h\left(\begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ T_1 \quad T_2 \end{array}\right) = 1 + \max\{h(T_1), h(T_2)\}$$

Sætning 5.3.2:

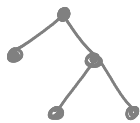
For ethvert fuldt binært træ T med $n(T)$ knuder og højde $h(T)$ gælder $n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$

Eks :



$$n=3$$

$$h=1 \Rightarrow 2^{h+1} - 1 = 3$$



$$n=5$$

$$h=2 \Rightarrow 2^{h+1} - 1 = 7$$

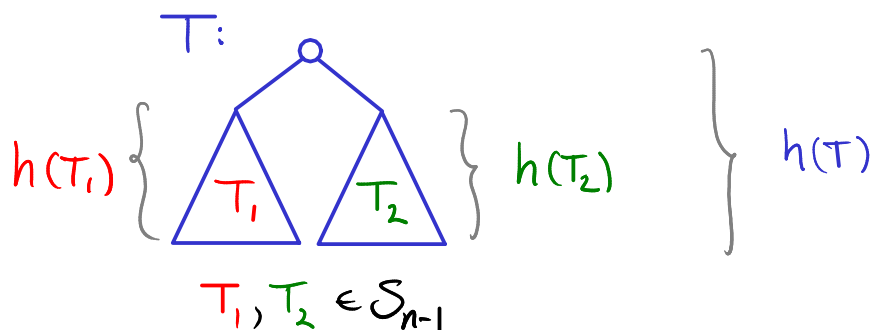
Bevis: Ved struktural induktion

Basis: $\mathcal{S}_1 = \{\bullet\}$

$$h=0$$

$$\text{D.v.s. } 2^{h+1} - 1 = 1 = n$$

Ind. skridt: $T \in \mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{n-1}$, hvor $n \geq 2$



$$n(T) = 1 + n(T_1) + n(T_2)$$

$$\leq 1 + (2^{h(T_1)+1} - 1) + (2^{h(T_2)+1} - 1), \text{ ifølge ind. ant.}$$

$$= 2^{h(T_1)+1} + 2^{h(T_2)+1} - 1$$

$$\leq 2^{h(T)} + 2^{h(T)} - 1, \text{ ifølge Def. 5.3.6}$$

$$= 2^{h(T)+1} - 1$$

□

(Kunne også bevises ved stærk induktion over højden.)