

Matricer (afsnit 2.6)

Vi har allerede brugt matricer til at repr. relationer. Datalogerne har set matricer i DM534, og kommer til at se dem igen.

Matrice-regning kan bruges til at løse ligningssystemer med flere ubekendte.

Bruges desuden til computergrafik og meget andet.

Vi skal se på, hvordan man kan manipulere matricer: addere, gange, transponere.

Desuden skal vi se, at matricer kan være kvadratiske og symmetriske, og vi skal se på neutrale matricer m.h.t. addition og multiplikation.

Eks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ rækker} \\ 3 \text{ søjler} \end{array}$$

A er en 2×3 -matrix

Addition

Eks:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+1 & 4+0 \\ 1+0 & 0+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{Def. 2.6.3})$$

A og B kan lægges sammen, fordi de har samme dimensioner, men de kan ikke ganges...

Multiplikation

Eks:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3 \text{ matrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot D &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = E \quad 2 \times 3 \text{ - matrix} \end{aligned}$$

$$e_{ij} = a_{i1}d_{1j} + a_{i2}d_{2j} + a_{i3}d_{3j} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}d_{kj}$$

Når man skal gange matrixer sammen, kan det være bekvemt at skrive dem forskudt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 13 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Generelt:

$$\begin{matrix} k \\ \boxed{F} \\ m \end{matrix} \times \begin{matrix} m \\ \boxed{G} \\ n \end{matrix} = \begin{matrix} k \\ \boxed{H} \\ n \end{matrix}$$

$$\boxed{h_{ij} = \sum_{l=1}^m f_{il} g_{lj}} \quad (\text{Def. 2.6.4})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ mult.}}$

H har $k \cdot n$ pladser
D.v.s. ialt $k \cdot n \cdot m$ mult.

D.A er ikke defineret:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A.A er heller ikke defineret

Men det er D.D, for D er kvadratisk,
d.v.s. #rækker = #søjler (Def. 2.6.1)

„Eks 4“: Matrix mult. er ikke kommutativ:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+1 \\ 0+1 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq$$

$$Y \cdot X = \begin{bmatrix} 2+0 & 2+0 \\ 1+0 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Gælder der så heller ikke, at

$$D \cdot D^2 = D^2 \cdot D ?$$

Jo, for matrix-mult. er associativ:

$$(M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)$$

Neutrale matrixer

Eks:

$$A + O = A$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neutral matrix m.h.t. $+$: O

$$o_{ij} = 0$$

Eks:

$$A \cdot I_3 = A :$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Den neutrale matrices dimensioner ligger fast:

- Med antallet af rækker sørger vi for, at den kan ganges på A .
- Med antallet af søjler sørger vi for, at resultatet har det rigtige antal søjler.

Og omvendt, når matrixen ganges på venstre side:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$I_2 \cdot A = A$$

Def. 2.6.5

Neutral matrix m.h.t. $\cdot$: $M = I_n$

$$m_{ii} = 1$$

$$m_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

Kaldes også en identitetsmatrix

Transponering

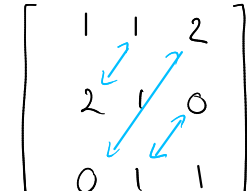
Eks:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Byt om på rækker og søjler:

$$m_{ij}^T = m_{ji} \quad (\text{Def. 2.6.6})$$

Eks:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$


Kvadratiske matrixer: spejl omkring diagonalen

Hvis $M = M^T$, er M symmetrisk (Def. 2.6.7)

Kan selvfølgelig kun opfyldes af kvadratiske matrixer.

0-1-matricer

0 ~ Falsk

1 ~ Sand

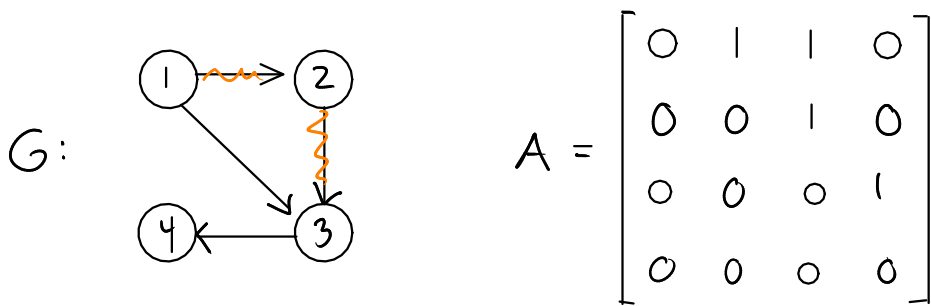
Def. 2.6.9: Boolsk produkt

$M_1 \odot M_2$ beregnes som $M_1 \cdot M_2$, men med

$+ \rightarrow \vee$

$\cdot \rightarrow \wedge$

Eks: Adjacens



A angiver alle kanter, dvs alle veje af længde 1, i G.
Hvilke veje af længde 2 findes der i G?

Der er en kant fra ① til ②, og videre fra ② til ③.

$$A \odot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^{[2]}$$

Hvordan findes veje af længde 3?

Def. 2.6.10:

Hvis M er en $n \times n$ -matrix, gælder:

$$M^{[r]} = \overbrace{M \odot M \odot \dots \odot M}^{r \text{ gange}}, \quad \text{for } r \in \mathbb{Z}^+$$

$$M^{[0]} = I_n$$

Man kan selvfølgelig også beregne det boolske produkt af to ikke-kvadratiske matrixer (hvis deres dimensioner "passer sammen"). Se f.eks. Eks. 8.