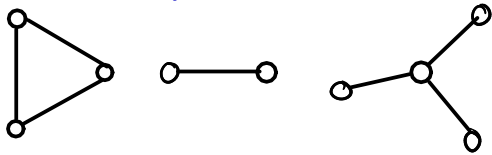


Sidste gang

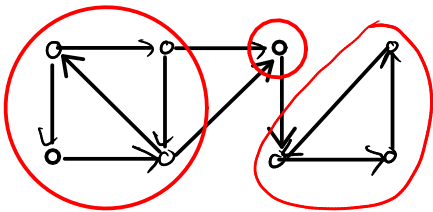
Vi afsluttede grafer:

(Simple) stier og kredse

Sammenhæng:



har 3 sammenhængskomponenter
↑
maksimal sammenhængende delgraf



er svagt sammenhængende, og
har 3 stærke sammenhængs-
komponenter

Træer kan defineres på mange forskellige måder:
(kommer i til at bruge i DM507)

For en ikke-orienteret graf G med n knuder gælder:

- $\Updownarrow$ G er et træ
- $\Updownarrow$ G er smh. & acyklisk (Def. 1)
- $\Updownarrow$ $\exists!$ sti ml. hvert knudepar (Sætning 1)
- $\Updownarrow$ G er smh., men
- $\Updownarrow$ $\forall e \in E: G - e$ er ikke smh. (Opgave 14)
- $\Updownarrow$ G er acyklisk, men
- $\Updownarrow$ $\forall u, v \in V: G + \{u, v\}$ er ikke acyklisk
- $\Updownarrow$ G er smh. og har $n-1$ kanter (Opgave 15a)
- $\Updownarrow$ G er acyklisk og har $n-1$ kanter (Opgave 15b)

I opgave 15 kan man bruge

Sætning 2: Et træ med n knuder har $n-1$ kanter

Følger og rækker (afsnit 2.4)

Følge (sequence)

Ordnet mængde /
funktion fra (en delmængde af) $\mathbb{N}$

Eks: Fibonacci-tallene (uendelig følge)

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \text{ for } n \geq 2$$

ingen dør
Hvert par, som var der allerede for to måneder siden, får et par unger.

Modellerer # kaniner på en ø:

- Et par sættes på øen ved starten af første måned
- Fra et par er to måneder, får de et par unger hver måned
- Ingen kaniner dør

Eks: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ (uendelig følge)

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+, \quad f(n) = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^+ \quad (n\text{'te led})$$

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \quad (\text{hule følger})$$

↑ konflikt med mængdenotation

Eks: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ (uendelig følge)

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Eller rekursiv def:

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}, \quad \text{for } n \geq 1$$

Eks på:

Geometrisk følge

$$a, ar, ar^2, \dots$$

$$a_n = a \cdot r^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

begyndelsesled $\nwarrow$ $\swarrow$ fælles faktor

Eksempel fra før: $a=1, r=\frac{1}{2}$

Aritmetrisk følge

$$a, a+d, a+2d, \dots$$

$$a_n = a + nd, \quad n \in \mathbb{N}$$

begyndelsesled $\nwarrow$ $\swarrow$ fælles forskel

Eks: $1, 3, 5, 7, \dots$

$$a=1, d=2$$

Eks: Mandibrot - følge

Defineret for hvert $c \in \mathbb{C}$:

$$X_0 = 0$$

$$X_n = X_{n-1}^2 + c, \quad n \geq 1$$

c tilhører Mandibrot-mængden,
hvis $\{X_n\}$ er begrænset

i tilhører Mandibrot-mængden:

$$X_1 = 0^2 + i = i$$

$$X_2 = i^2 + i = i - 1$$

$$X_3 = (i-1)^2 + i = -1 + 1 - 2i + i = -i$$

$$X_4 = (-i)^2 + i = i - 1 = \underline{X_2}$$

$$X_5 = X_3$$

$$X_6 = X_4 = X_2$$

$\vdots$

D.v.s.

$\{X_n\}$ er begrænset

Escape condition: $|X_n| > 2$

Jo hurtigere escape, jo lysere farve.

Man kan også lægge leddene i en følge sammen:

Række (series)

Sum af et uendeligt (ellv endeligt) # led

Eks: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Geometrisk række: $\sum_{i=0}^n ar^i$

$a=1, r=\frac{1}{2}$

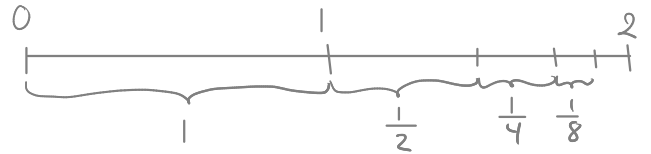
$n=1: 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$

$n=2: 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}$

$n=3: 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}$

$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2$



Mer generelt:

Tabel 2, linie 1:

$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad \text{for } r \neq 1 \quad (= n+1, \text{ for } r=1)$

D.U.S.

$\sum_{i=0}^n 2^i = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

Illustration: (binære tal)

$i=0$	1
$i=1$	10
$i=2$	100
$i=3$	1000
	1111

$= 10000 - 1$

$r=3$:

Ternære tal:

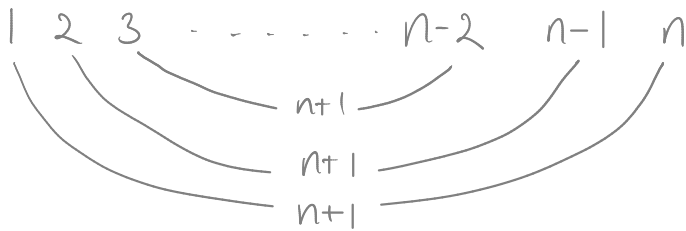
$2 \cdot 3^0:$	2
$2 \cdot 3^1:$	20
$2 \cdot 3^2:$	200
$2 \cdot 3^3:$	2000
	2222

$= 10000 - 1$

Aritmetrisk række:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (a+id) &= (n+1)a + d \sum_{i=0}^n i \\ &= (n+1)a + d \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Tabel 2, s. 166
2. linie



Beviset tidligere i
kurset v.h.a. induktion

n lige:

$\frac{n}{2}$ par med sum $n+1$

n ulige:

$\frac{n-1}{2}$ par med sum $n+1$

Midtvorte tal: $\frac{n+1}{2}$

alt: $(n-1) \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Eks:

$$\begin{aligned}1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n+1 &= \sum_{i=0}^n (1+2i) \\ &= (n+1) \cdot 1 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n+1 + n(n+1) \\ &= (n+1)(n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1\end{aligned}$$

Summer dukker f.eks. op, når vi skal beregne #gennemløb af et loop (for at analysere køretid af en algoritme):

for $i := 1$ to 10
 for $j := 1$ to 20
 ...

$$\# \text{gennemløb} = 10 \cdot 20 \left(= \sum_{i=1}^{10} 20 \right) = 200$$

for $i := 1$ to 10
 for $j := 1$ to i
 ...

$$\# \text{gennemløb} = \sum_{i=1}^{10} i = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

for $i := 5$ to 10
 for $j := 1$ to i
 ...

$$\begin{aligned} \# \text{gennemløb} &= \sum_{i=5}^{10} i = \sum_{i=1}^{10} i - \sum_{i=1}^4 i = 55 - \frac{4 \cdot 5}{2} \\ &= 45 \end{aligned}$$

for $i:=1$ to 3

for $j:=1$ to i

for $k:=1$ to j

...

$$\begin{aligned}\# \text{ generated} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i j = \sum_{i=1}^3 \frac{i(i+1)}{2} \quad \text{Table 2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{i^2+i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i \\ \text{Table 2, line 2 of 3} &\Rightarrow = \frac{1}{2} \left(\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} \right) + \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 4}{2} \\ &= 7 + 3 = 10\end{aligned}$$

Notation:

$$\sum_{i=1}^5 i = \sum_{1 \leq i \leq 5} i = \sum_{i \in A} i, \quad \text{where } A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$