

Sidste gang:

Følger

Geometriske følger: $a, ar, ar^2, \dots$

Eks: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

$2, 6, 18, 54, \dots$

Aritmetriske følger: $a, a+d, a+2d, \dots$

Eks: $1, 3, 5, 7, \dots$

Mandelbrot-følger: $X_0 = 0$ (defineret for ethvert $c \in \mathbb{C}$)
 $X_n = X_{n-1}^2 + c$

Eks ($c=1$): $0, i, i-1, -i, i-1, -i, i-1, -i, \dots$

Rækker

Geometriske rækker: $\sum_{i=0}^n ar^i$ eller $\sum_{i=0}^{\infty} ar^i$

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

$$\text{Eks: } \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{i=0}^n 3^i = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$$

Aritmetriske rækker: $\sum_{i=0}^n (a+id) = (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2}d$

$$\text{Eks: } \sum_{i=0}^n (1+2i) = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2 = n^2 + 2n + 1$$

Dobbelt- / tripel - summer :

$$\begin{aligned}\text{Eks: } \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{20} \sum_{k=1}^5 (i+j+k) &= \sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{j=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^5 (i+j+k) \right) \right) \\&= \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^5 (i+j) + \sum_{k=1}^5 k \right) \\&= \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{20} \left(5(i+j) + \frac{5 \cdot 6}{2} \right) \\&= 5 \cdot \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{20} (i+j+3) \\&= 5 \sum_{i=1}^{10} \left(20i + \frac{20 \cdot 21}{2} + 20 \cdot 3 \right) \\&= 5 \cdot 20 \sum_{i=1}^{10} \left(i + \frac{21}{2} + 3 \right) \\&= 100 \left(\frac{10 \cdot 11}{2} + \frac{210}{2} + 30 \right) \\&= 100 (55 + 105 + 30) \\&= 19.000\end{aligned}$$

Terminologi:

Def 1

(a) Hvis $a_n \geq L$, for $n \in \mathbb{N}^+$, siges:

- $\{a_n\}$ er **begrænset nedfra** af L
- L er en **nedre grænse** for $\{a_n\}$

Hvis $a_n \leq M$, for $n \in \mathbb{N}^+$, siges:

- $\{a_n\}$ er **begrænset overfra** af M
- M er en **øvre grænse** for $\{a_n\}$

Hvis $\{a_n\}$ er begrænset både nedfra og overfra, siges:
 $\{a_n\}$ er **begrænset**

D.v.s. $\forall n \in \mathbb{N}^+ : |a_n| \leq K$, hvor $K = \max\{|L|, |M|\}$

(b) Hvis $\forall n \in \mathbb{N}^+ : a_n \geq 0$, siges: $\{a_n\}$ er **positiv**

Hvis $\forall n \in \mathbb{N}^+ : a_n \leq 0$, siges: $\{a_n\}$ er **negativ**

(c) Hvis $\forall n \in \mathbb{N}^+ : a_{n+1} \geq a_n$, siges: $\{a_n\}$ er **voksende**

Hvis $\forall n \in \mathbb{N}^+ : a_{n+1} \leq a_n$, siges: $\{a_n\}$ er **aftagende**

Hvis $\{a_n\}$ er voksende eller aftagende, siges:
 $\{a_n\}$ er **monoton**

(d) Hvis $\forall n \in \mathbb{N}^+ : a_n a_{n+1} < 0$, siges: $\{a_n\}$ er **alternierende**

Eks: $\{(\frac{1}{2})^n\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Def. 1(a): Begrænset nedefra af 0
 Begrænset ovenfra af $\frac{1}{2}$
 D.v.s. *begrænset*

Def. 1(b): *Positiv*

Def. 1(c): *Aftagende*
 D.v.s. *monoton*

Eks: $\{(-\frac{1}{2})^n\} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Def. 1(d): *Alternierende* (skiftes positiv og negativ)

Eks: $\{n-100\} = -99, -98, -97, \dots$

Ultimativt positiv (fra $n=100$)

Eks: $\{\frac{n^2}{2^n}\} = \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \dots$

$\xrightarrow{\qquad \qquad \qquad \approx 0,78 \quad \approx 0,56 \quad \approx 0,38 \qquad \qquad \qquad}$

Ultimativt aftagende (fra $n=3$)

En følge kan også være ultimativt alternierende, men:
 ultimativt begrænset $\Rightarrow$ begrænset (hvorfor?)

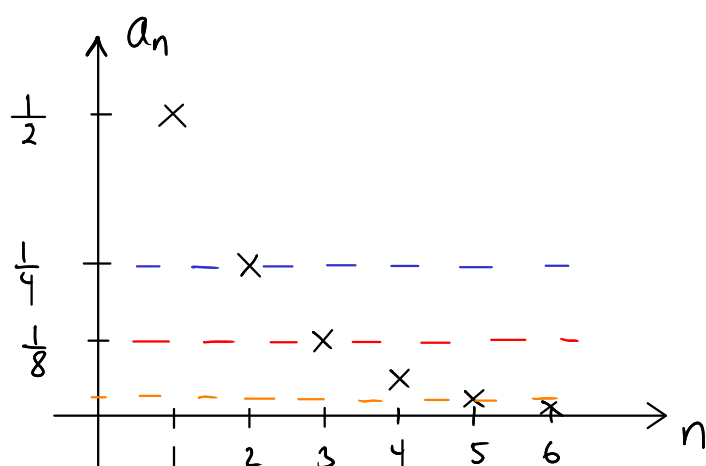
Eks: $\{a_n\} = \{(\frac{1}{2})^n\}$

$\{a_n\}$ er **ultimativt** begrænset overfra af 0,01 (fra $n=7$)

Faktisk er $\{a_n\}$ **ultimativt** begrænset overfra af ethvert $\varepsilon > 0$.

Desuden er $\{a_n\}$ begrænset nedefra af 0.

Det betyder, at $\{a_n\}$ **konvergerer mod 0**:



$$a_n < \frac{1}{4}, \text{ for } n \geq 3$$

$$a_n < \frac{1}{8}, \text{ for } n \geq 4$$

$$a_n < \frac{1}{32}, \text{ for } n \geq 6$$

Generelt: $a_n < \varepsilon$, for $n > \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil$, fordi

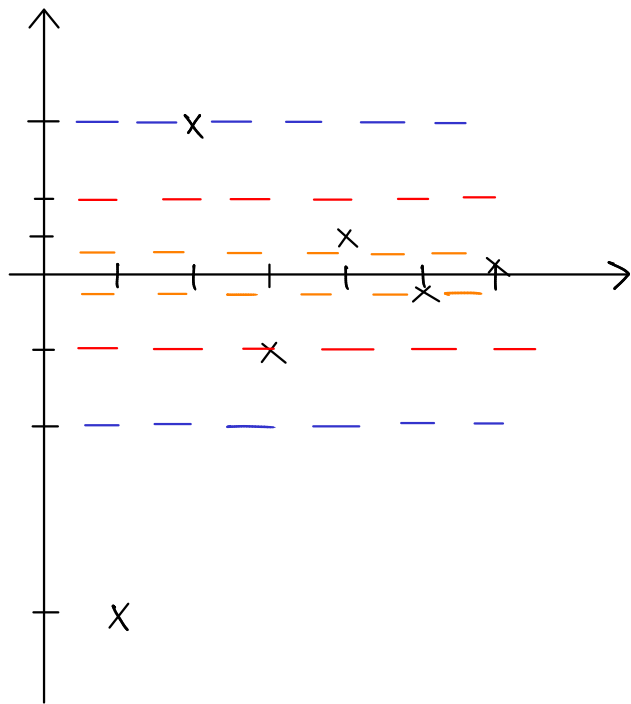
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \iff \frac{1}{2^n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \iff \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n$$

D.v.s.: Lige gyldigt hvor lille ε er, findes der et N , der er så stort, at $a_n < \varepsilon$ for alle $n \geq N$ (f.eks $N = \log_2(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$).

D.v.s. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : a_n < \varepsilon$

Eks: $\{b_n\} = \{(-\frac{1}{2})^n\} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

$\{b_n\}$ konvergerer mod 0:



$$|b_n| < \frac{1}{4}, \text{ for } n \geq 3$$

$$|b_n| < \frac{1}{8}, \text{ for } n \geq 4$$

$$|b_n| < \frac{1}{32}, \text{ for } n \geq 6$$

Generelt: $|b_n| < \varepsilon, \text{ for } n > \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

D.v.s.: Ligeegyldigt hvor lille ε er, findes der et N , der er så stort, at afstanden ml. b_n og 0 er mindre end ε , for alle $n \geq N$.

D.v.s. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n \geq N : |b_n| < \varepsilon$

Def 2

Lad $\{a_n\}$ være en uendelig følge, og lad $L \in \mathbb{R}$.
Hvis

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$$

da

konvergerer $\{a_n\}$ mod grænseværdien L

↑ 0 : eks overfor

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ skrives også som

$$a_n \rightarrow L \text{ for } n \rightarrow \infty$$

↑
„går imod“

↑
„går mod“

En følge, som ikke konvergerer, diverger.

Eks 5:

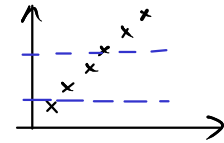
$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \quad \text{konverger mod } 1$$

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

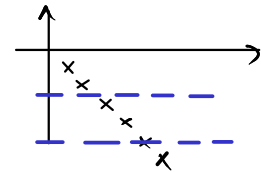
$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

D.v.s. vi kan f.eks. vælge $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ i Def. 2

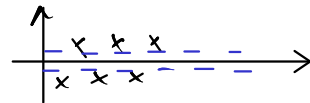
$$\{n\} = 1, 2, 3, \dots \quad \text{divorger mod } \infty$$



$$\{-n\} = -1, -2, -3, \dots \quad \text{divorger mod } -\infty$$



$$\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \dots \quad \text{divorger}$$



Regneregler for grænseværdier (s. 499 ø.):

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konverger, gælder:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\begin{aligned} \text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Tilsvarende for $-$ og $\cdot$
og for $/$, hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

$$\text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2 \cdot 1 = 2$$

Eks 6a:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} \\&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} \\&= \frac{2 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \\&= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Tommelfingerregel:

Kig på de mest betydende led (dem, der vokser hurtigst). I dette tilfælde: $2n^2$ og $5n^2$.