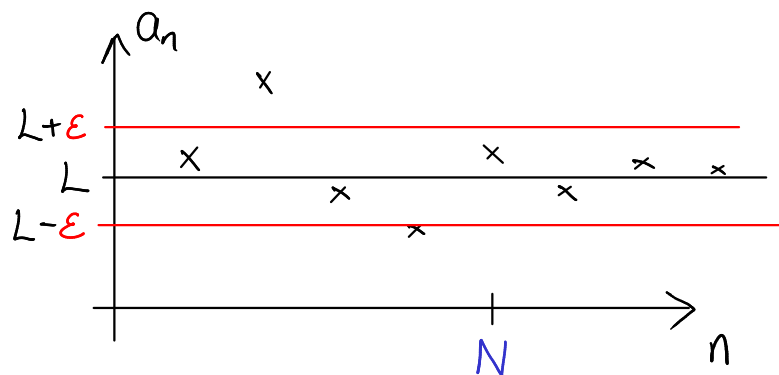


Sidste gang

Hvis $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$,

siger man, at

- $\{a_n\}$ konvergerer mod L
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
- grænseværdier for $\{a_n\}$ er L
- $a_n \rightarrow L$ for $n \rightarrow \infty$



Eks: $\left\{ \frac{n-1}{n} \right\} \quad (L=1)$

Ellers

Siges $\{a_n\}$ at divergere. Tre muligheder:

- Hvis $\forall y \in \mathbb{Z} : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : a_n > y$,
Siges $\{a_n\}$ at divergere mod ∞ , og $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

Eks: $\{\log_2 n\}$

- Hvis $\forall y \in \mathbb{Z} : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : a_n < y$,
Siges $\{a_n\}$ at divergere mod $-\infty$, og $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

Eks: $\{-2n\}$

- Ellers siges $\{a_n\}$ blot at divergere.

Eks: $\{\sin(n)\}$ (begrænset)

Eks: $\{(-1)^n\}$ (begrænset)

Eks: $\{(-1)^n \cdot n\}$ (hverken begrænset ovenfra eller nedefra)

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konverger, gælder flg. regneregler:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

—

+

/

—

+

/

, hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Öctning 3

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0, \text{ hvis } |x| < 1$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \text{ for alle } x \in \mathbb{R}$$

Bevis:

(a): (Beviset er et smule anderledes end i bogen.)

$$\text{Def. 2} \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n \geq N : |x^n| < \varepsilon$$

$$\uparrow |x^n| < \varepsilon$$

$$\uparrow |x|^n < \varepsilon$$

$$\uparrow n \ln |x| < \ln \varepsilon$$

$$\uparrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}, \text{ da } \ln |x| \neq 0, \text{ fordi } |x| < 1$$

$\uparrow$ "Vender" ulighedstegnet, fordi vi dividerer med noget negativt.

D.v.s.

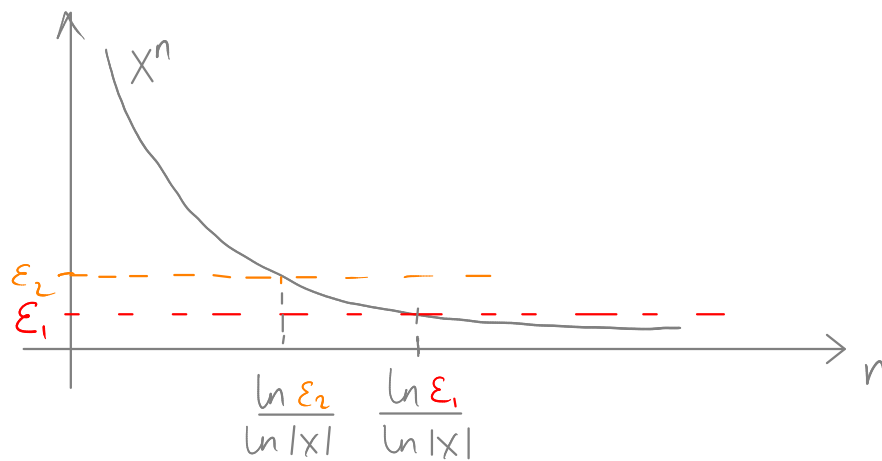
$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} \Rightarrow |x^n| < \varepsilon$$

D.v.s.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n \geq N : |x^n| < \varepsilon$$

$$\uparrow \text{f.eks. } N = \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} + 1$$

Illustration :



(b) :

Eks : $x=2$

$n=5$:

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{2^5}{5!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2}}_2 \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\frac{x}{n}}$$

$n=10$:

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{10} = \underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2}}_2 \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdots \frac{2}{9}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{2}{10}}_{\frac{x}{n}}$$

Generelt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &= \frac{\cancel{|x|} \cdot \cancel{|x|} \cdot \dots \cdot \cancel{|x|}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \\ &= \underbrace{\frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{\lceil |x| \rceil}}_{\substack{\text{afhænger kun af } x, \\ \text{ikke af } n}} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{\lceil |x| \rceil + 1} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n-1} \cdot \frac{|x|}{n}}_{< \frac{|x|}{n}} \end{aligned}$$

$$< C \cdot \frac{|x|}{n}, \quad \text{hvor} \quad C = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{\lceil |x| \rceil} = \frac{|x|^{\lceil |x| \rceil}}{\lceil |x| \rceil!}$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \frac{|x|}{n}, \quad \text{hvor} \quad C = \frac{|x|^{\lceil |x| \rceil}}{\lceil |x| \rceil!} \\ &= C \cdot |x| \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}_{=0}, \quad \text{ifølge regnereglerne for grænseværdier} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Desuden klart, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \geq 0$$

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

□

Eks 10 :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} + \frac{5^n}{5^n} \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 \\&= 0 + 0 + 1, \text{ ifølge Sætning 3(a)} \\&= 1\end{aligned}$$

Uendelige rækker

(afsnit 9.2)

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Def 3

Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ kaldes rækkens n 'te partielle sum

Hvis $\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$,

siges rækken at konvergere mod s .

Dette skrives også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Eks: $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$\vdots$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

D.v.s.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Geometriske rækker

$$\sum_{i=0}^n r^i = \sum_{i=1}^{n+1} r^{i-1} = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad \text{for } r \neq 1$$

D.v.s.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \stackrel{\text{for } r \neq 1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & \text{hvis } |r| < 1 \\ \infty, & \text{hvis } r > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \infty$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ diverger, hvis } r \leq -1.$$



Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \text{ diverger:}$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = -3, \quad s_2 = 6, \quad s_3 = -21, \dots$$

og udslagene bliver større og større.

Eks: Coupon Collector's Problem

Corn Flakes - pakker med et klistermærke i hver.
 n forskellige klistermærker.

For at få et af hver slags skal man i
gennemsnit købe nH_n pakker:

Forventet #pakker inden man har 1 klistermærke: $= \frac{n}{n}$

Forventet ekstra #pakker før man har 1 mere: $\frac{n}{n-1}$

$$\begin{array}{rcl} \hline & " & \frac{n}{n-2} \\ & \vdots & \\ \hline & " & n = \frac{n}{1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} | \text{ alt: } & \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} \\ & = n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{1} \right) \\ & = nH_n \\ & \approx n \ln n, \text{ som det ses af næste eks.} \end{aligned}$$

D.v.s.

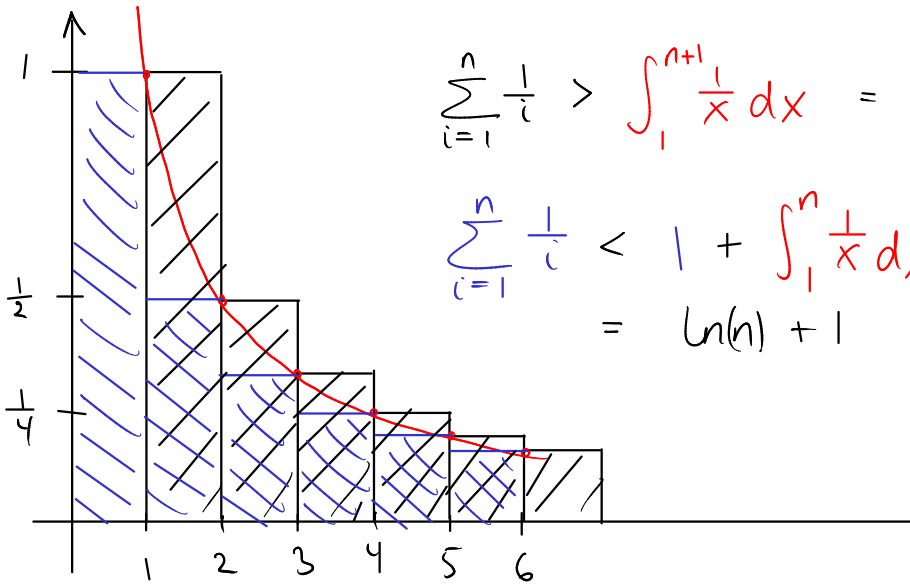
Hvis der er 10 forskellige klistermærker,
skal man i gennemsnit købe
 $10 \cdot \ln(10) \approx 23$ pakker.

Hvis der er 100 forskellige klistermærker,
skal man i gennemsnit købe
 $100 \cdot \ln(100) \approx 461$ pakker.

Eks 4:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \text{Harmoniske række}$$

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad n\text{'te harmoniske tal}$$



$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + [\ln(x)]_1^n = \ln(n) + 1$$

D.v.s.

$$\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$$

D.v.s. H_n divergerer mod ∞ .