

Sidste gang

Følger (afsnit 9.1)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n &= 0, \text{ hvis } |x| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} &= 0, \text{ for alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \text{ Sætning 3}$$

Rækker (afsnit 9.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

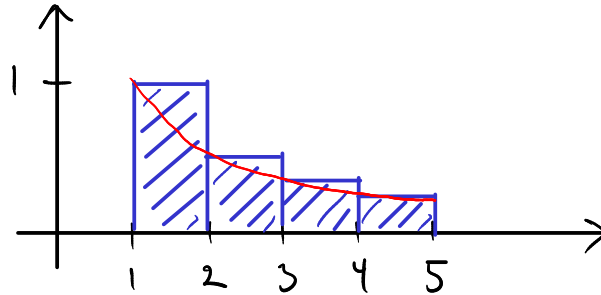
$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i : n\text{'te particle sum}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

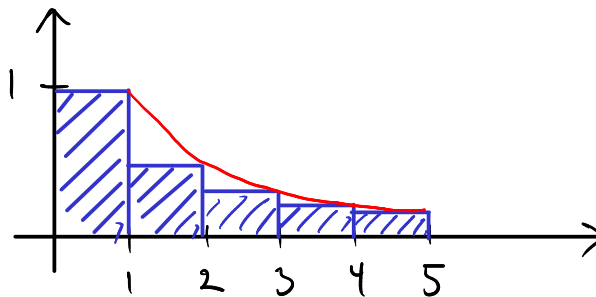
$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \left\{ \begin{array}{ll} \text{divergerer,} & \text{hvis } r \leq -1 \\ = \frac{1}{1-r}, & \text{hvis } -1 < r < 1 \\ = \infty, & \text{hvis } r \geq 1 \end{array} \right.$$

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \ln(n):$$

$$H_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1):$$



$$H_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln(n) + 1:$$



1 dag

Konvergenzkriterier for rækker (afsnit 9.2-9.3)
(De fleste beviser bliver kun skitseret.)

Sætning 4



$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

D.v.s. (ved kontraposition)

$\{a_n\}$ konvergerer ikke mod 0



$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer}$$

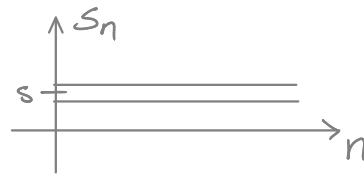
Beris:

Hvis s_n skal konvergere, må $s_n - s_{n-1} = a_n$ gå mod 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$



$$\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$



$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \\ &= a_n \end{aligned}$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} \\ &= s - s \\ &= 0 \end{aligned}$$



Husk, at det modsatte ikke gælder:

Eks: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

D.v.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ er en nødvendig, men ikke tilstrækkelig betingelse for, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverger.

Eks 5(a):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \text{ diverger, da } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} > 0$$

Konvergens afhænger kun af rækkens hale (tail):

Sætning 5

$$\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \\ \updownarrow \\ \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \end{array}$$

Bevis: Opgave 23.

D.v.s. det er OK blot at anvende konvergens-kriterierne i afsnit 9.3 på rækkens hale.

Sætning 6

Lad $\{a_n\}$ være en ultimativt positiv følge,
og lad $\{s_n\}$ være dens partielle summer.

Hvis $\{s_n\}$ er begrænset ovenfra, konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ellers er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Bevis: Opgave 24.

Bemærk, at Def. 3 betyder at grænseværdier for en uendelig række beregnes præcis som grænseværdier for en uendelig følge.

Dermed kan vi bruge mange af de regnearbejder, som vi mødte i afsnit 9.1. Dette er udtrykt i Sætning 7.

Sætning 7

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, da gælder

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(c) $a_n \leq b_n$, for alle $n \geq 1$
 $\downarrow$
 $A \leq B$

Bemærk: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n} \quad \text{i mange tilfælde.}$$

(herfor?)

Illustration:

$$\sum_{n=1}^2 a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^2 a_n \cdot \sum_{n=1}^2 b_n &= (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

Eks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \neq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{1} = 1$$

Konvergens-kriterier for positive rækker

(afsnit 9.3)

Sætning 8 (Integral-Kriteriet)

Hvis $a_n = f(n)$, hvor

f er positiv, kontinuert og aftagende på $[N, \infty)$, $N \in \mathbb{Z}^+$,
da gælder enten

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\int_N^{\infty} f(x) dx$ konvergerer begge

eller

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_N^{\infty} f(x) dx = \infty$$

Beweis:

Da f og $\{a_n\}$ er positive, har integral og rækken
hver især kun to muligheder:

at konvergere eller at divergere mod ∞ .

D.v.s. sætningen siger blot, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konv.}$$

Ifølge Sætning 5 behøver vi kun se på rækkens hale:

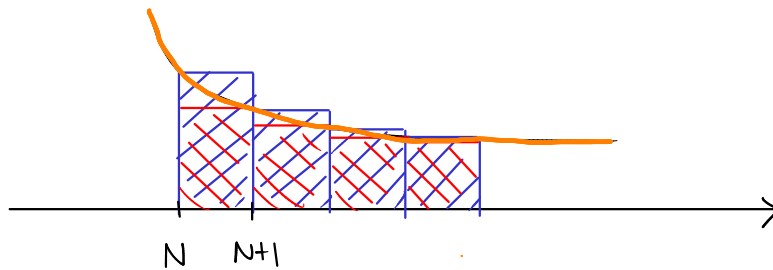
For ethvert $N \in \mathbb{Z}^+$ gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

Vi bruger undv- og oversummer som i Eks 9.2.4 om H_n :

Da f er aftagende gælder, at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \stackrel{(*)}{\leq} \int_N^{\infty} f(x) dx \stackrel{(**)}{\leq} \sum_{n=N}^{\infty} a_n :$$



Af $(*)$ og Sætning 6 fås:

$$\int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

Af $(**)$ og Sætning 6 fås:

$$\int_N^{\infty} f(x) dx = \infty \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n = \infty$$

□

Generalisering af H_n :

p -rækker (Eks. 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{div. mod } \infty, & \text{hvis } p \leq 1 \\ \text{konv.}, & \text{hvis } p > 1 \end{cases}$$

Bevis:

$p \leq 0$:

$$\frac{1}{n^p} = n^{\overbrace{-p}^{\geq 0, \text{ da } p \leq 0}} \geq n^0 = 1$$

$$\text{D.v.s. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \geq 1$$

$$\text{D.v.s. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty, \text{ ifølge Sætning 4.}$$

$p > 0$: Bruger Integral-Kriteriet (Sætning 8)

$$\underline{0 < p < 1}: \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{\infty} \overset{1-p > 0}{=} \infty - \frac{1}{1-p} = \infty$$

$$\underline{p=1}: \int_1^{\infty} x^{-1} dx = [\ln x]_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty$$

$$\underline{p > 1}: \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{\infty} \overset{1-p < 0}{=} 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

□

p -rækker kan være nyttige i kombination med Sætning 9 og 10:

Sætning 9 (Sammenlignings-Kriteriet)

(Comparison Test)

Hvis $0 \leq a_n \leq K b_n$ ultimativt, $K \in \mathbb{R}^+$,
da gælder:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

Bevis:

(a):

$$\begin{aligned} & \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq K b_n \\ \Updownarrow & \\ & \exists N \in \mathbb{Z} : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} K b_n, \text{ ifølge Sætning 7(c)} \end{aligned}$$

$$\Updownarrow \quad \exists N \in \mathbb{Z} : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq K \sum_{n=N}^{\infty} b_n, \text{ ifølge Sætning 7(a)}$$

$$\Downarrow \quad \sum_{n=N}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.}, \text{ ifølge Sætning 6}$$

da a_n er ultimativt positiv

$$\Updownarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}, \text{ ifølge Sætning 5}$$

(b): Da $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er ultimativt positive, er
(b) blot det kontrapositive af (a).

□

Eks 3"

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n+1}}$ konvergerer ifølge Sætning 9(a) (med $K=4$):

$$0 \leq \frac{4}{2^{n+1}} < \frac{4}{2^n} = 4 \cdot \frac{1}{2^n}, \text{ og}$$

$\left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ er en konvergent geometrisk følge.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ divergerer ifølge Sætning 9(b):

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \text{ for } n \geq 2, \text{ og}$$

$\frac{1}{n}$ divergerer ifølge Eks. 1

Husk, at Sætning 9 ikke siger, at $\sum a_n$ konvergerer $\Rightarrow \sum b_n$ konvergerer

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^3 + 4n^2}$ kan godt afgøres v.h.a.

Sætning 9, men det er nemmere at bruge Sætning 10...

Af Sætning 9 følger:

Sætning 10 (Grænse-sammenlignings-Kriteriet)

(Limit Comparison Test)

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er positive følger, og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \quad (\text{evt. } = \infty)$$

da gælder

$$(a) \quad (L < \infty \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

$$(b) \quad (L > 0 \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

Bevis:

(a):

$$\begin{aligned} & L < \infty \\ \Downarrow & \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} < L + 1, \text{ ifølge Def. 2} \end{aligned}$$

$$\Updownarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n < (L+1)b_n$$

$$\Downarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}, \text{ ifølge Sætning 9(a)}$$

$$(b): \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} > \frac{L}{2}, \text{ ifølge Def. 2 (med } \varepsilon = \frac{L}{2})$$

$$\Downarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > \frac{L}{2} \cdot b_n$$

$$\Downarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \text{ ifølge Sætning 9(b)}$$

□

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^3 + 4n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2/n - 3/n^2 + 1/n^3}{5 + 4/n}$

$$\frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^3 + 4n^2} \bigg/ \frac{1}{n} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{5n^3 + 4n^2} \rightarrow \frac{2}{5} \text{ for } n \rightarrow \infty$$

D.v.s. rækken diverger ifølge Sætning 10(b)
og Eks. 1.