

Sidste gang:

Logiske operatorer: $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$ + præcedensregler

Sandhedstabeller for operatorer og sammensatte udsagn

p	$\neg p$	p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
S	F	S	S	S	S	S	S
F	S	S	F	S	F	F	F
		F	S	S	F	S	F
		F	F	F	F	S	S

Præcedens: $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$

Eks:

$$\begin{array}{ccc} & \neg p \wedge q \Rightarrow \neg p \vee q & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \neg p \wedge (q \Rightarrow \neg p) \vee q & & (\neg p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee q) \end{array}$$

✗ ✓

Af sandhedstabellen fremgår det, at

$$p \Rightarrow q \equiv p \wedge q \vee \neg p \text{ og}$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q$$

Vi udlodte også to andre ækvivalenser:

$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$	(Tabel 1.3.7)
$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	(Tabel 1.3.8)

$p \Rightarrow q$ og $p \Leftrightarrow q$ kan formuleres på mange forskellige måder:

$$p \Rightarrow q$$

p medfører q

hvis p , så q

p er en tilstrækkelig betingelse for q

p kun hvis q

q er en nødvendig betingelse for p

$$p \Leftrightarrow q$$

p er ensbetydende med q

p hvis og kun hvis q

p hvis q

p er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for q

1 dag:

⊕

Flere ækvivalenser (Fra Tabel 1.3.6 og 1.3.7)

Tabel 1.3.6, 1.3.7 og 1.3.8 er nyttige!

Læs gerne dem alle tre igennem.

Hvis du bliver tid:

Åbne udsagn } Afsnit 1.4
Kvantorer : $\forall, \exists$

$p \oplus q$: eksklusiv eller
 enten p eller q
 p og q har forskellige sandhedsværdier

p	q	$p \oplus q$
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	F

D.v.s.

$$p \oplus q \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$$

$$p \oplus q \equiv \neg p \Leftrightarrow q$$

D.v.s. " $\oplus$ " kan udtrykkes o.h.a. " $\neg$ " og " $\Leftrightarrow$ "

" $\Rightarrow$ " kan tilsvarende omskrives o.h.a. " $\neg$ " og " $\vee$ "

D.v.s. vi kan føje endnu en ækvivalens til samlingen?

Men først er gåde...

Eks 1.2.8:

Riddere taler altid sandt.

Knægte lyver altid.

(1) A siger: B er ridder

(b)

(2) B siger: Vi er forskellige slags

$(a \oplus b)$

Hvad er A og B?

Definer følgende to udsagn.

a: A er ridder

b: B er ridder

Kan A være ridder?

$$a \stackrel{(1)}{\Rightarrow} b \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \neg a \quad \text{⚡ (modstrid)}$$

Kan A være knægt?

$$\neg a \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \neg b$$

$\neg a \wedge \neg b$ opfylder både (1) og (2).

Dvs. løsningen er:

A og B er begge knægte.

Kunne også løses v.h.s. sandhedstabel:

a	b	(1)	(2)
S	S		F
S	F	F	
F	S	F	
F	F	S	S

eneste mulighed

A og B's udtalelser kunne også skrives som
b og $a \oplus b$:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \quad (\text{Tabel 1.3.7, 1. linje})$$

Beweis:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
S	S	S	S
S	F	F	F
F	S	S	S
F	F	S	S

} (1)

} (2)

For begge udtryk gælder:

(1): Hvis p er sand, skal q også være det.

(2): Hvis p er falsk, er udsagnet sandt.

Tabel 1.3.6 (s. 29) er også vigtig.

Nogle simple, nogle lidt mere komplicerede:

Distributive love (lidt som at gange ind i parentes)

$$(1) p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Sandhedstabellen har 8 rækker.

For begge udsagn gælder:

- Hvis p er sand, er udsagnet sandt.

D.v.s. begge udsagn har „S” i de første fire rækker af sandhedstabellen.

- Hvis p er falsk, er udsagnet sandt, hvis q og r begge er sande.

D.v.s. blandt de sidste fire rækker, er det kun den første, der har et „S”.

$$(2) p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

For begge udsagn gælder:

- p skal være sand

D.v.s. „F” i nedste fire rækker

- Mindst et af q og r skal være sand, men de behøver ikke begge være det.

D.v.s. „S” i første tre rækker og „F” i fjerde række.

p	q	r	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
S	S	S	S	S
S	S	F	S	S
S	F	S	S	S
S	F	F	S	S
F	S	S	S	S
F	S	F	F	F
F	F	S	F	F
F	F	F	F	F

Kan vi omskrive $\neg(p \wedge q)$?

Hvis ikke $p \wedge q$ begge er sande, må der være mindst et af dem, der er falsk: $\neg p \vee \neg q$

Hvad med $\neg(p \vee q)$?

Hvis ikke mindst en af p og q er sand, må begge være falske: $\neg p \wedge \neg q$

De Morgans Love

(Tabel 1.3.2)

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Bevis: Opgave 1.3.6

Bevis: Tabel 1.3.3

Efterhånden, som vi har flere og flere ækvivalenser at gøre gældt med, er sandhedstabeller ikke nødvendigvis den mest effektive måde at bevise nye ækvivalenser:

Eks 1.3.6 (s. 31)

$$\boxed{\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q} \quad (\text{Tabel 1.3.7, 15})$$

Bevis:

$$\begin{aligned} \neg(p \Rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && (\text{Tabel 1.3.7, 21}) \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \left\{ \begin{array}{l} (\text{De Morgan (2)}) \\ (\text{Dobbelt-neg. loven}) \end{array} \right. \\ &\equiv p \wedge \neg q && \downarrow \\ &&& (\text{Tabel 1.3.6}) \end{aligned}$$

Virker det rimeligt?

Ja:

$p \Rightarrow q$ er falsk, netop når p er sand, og q er falsk.
 $p \wedge \neg q$ er sand, netop når _____

Lidt mere terminologi:

Def. 1.3.1: (s.26)

Tautologi: Sammensat udsagn, som er **sandt**, uanset sandhedsværdier af de udsagnsvariable, som indgår.

Eks: $p \vee \neg p$

$$p \Leftrightarrow p$$

$$p \Rightarrow p$$

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \quad (\text{og alle de andre} \\ \text{ækv. i afsnit 1.3})$$

Modstrid: Sammensat udsagn, som er **falsk**, uanset sandhedsværdier af de udsagnsvariable, som indgår.
(Contradiction)

Eks: $p \wedge \neg p$

$$p \Leftrightarrow \neg p$$

$$p \oplus p$$

$$\neg(p \vee q) \oplus (\neg p \wedge \neg q)$$

Kontingens: Sammensat udsagn, som hverken er en tautologi eller en modstrid

Eks: $p \vee q$

$$p \Rightarrow q$$

$$p \Rightarrow \neg p$$

Heltal: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Positive heltal: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

Naturlige tal: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

NB: Nozke definerer $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Kvantorer (Afsnit 1.4)

(Quantifiers)

Eks:

$$P(x) : \underbrace{2x > x}_{\text{fri variabel}}$$

åbent udsagn (propositional function)

$$\begin{array}{lll} \vdots & & \\ P(-1) : & -2 > -1 & \text{F} \\ P(0) : & 0 > 0 & \text{F} \\ P(1) : & 2 > 1 & \text{S} \\ P(2) : & 4 > 2 & \text{S} \\ \vdots & & \end{array}$$

$P(x)$ er sand, for ethvert $x \in \mathbb{Z}^+$. Altså:

$$\begin{array}{l} \updownarrow \\ P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \dots \quad \textcircled{\text{S}} \\ \updownarrow \\ \forall x \in \mathbb{Z}^+ : P(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \updownarrow \\ \boxed{\forall x \in \mathbb{Z}^+ : 2x > x} \quad \leftarrow \text{udsagn} \\ \begin{array}{l} \swarrow \quad \uparrow \quad \searrow \\ \text{"for alle"} \quad \text{"gælder"} \quad \text{bunden variabel} \end{array} \end{array}$$

Universel kvantor

universet / domænet (udelades sommetider, hvis det er underforstået)

Derimod er $P(x)$ ikke sand for alle $x \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{l} \updownarrow \\ \forall x \in \mathbb{Z} : 2x > x \quad \textcircled{\text{F}} \\ \updownarrow \\ \dots \wedge P(-1) \wedge P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \uparrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \text{F} \end{array}$$

Bemærk:

Når man læser f.eks. $\forall x \in \mathbb{Z}$, siger man som regel
"for alle heltal x " i stedet for
"for alle x i mængden af heltal".