

Sidste gang

Sidste operator: $\oplus$

Ækvivalenser fra Tabel 1.3.6 og 1.3.7:

Bevist v.h.a. sandhedstabeller:

$$(1) p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Distributive} \\ \text{Love} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \\ (2) \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q \end{aligned}} \right\} \text{De Morgans Love}$$

Bevist v.h.a. (1) og (2) og Dobbelt-negerings-loven:

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

Husk at læse og forstå de andre ækvivalenser i
Tabel 1.3.6, 1.3.7 og 1.3.8.

Terminologi / notation:

Tautologi

Modstrid (contradiction)

Kontingens

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}^+$

$\mathbb{N}$

Kvantorer (Afsnit 1.4)

(Quantifiers)

Eks:

$$P(x) : 2x > x$$

fri variabel

åbent udsagn (propositional function)

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \dots$$

$\Updownarrow$

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : P(x)$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}^+ : 2x > x}$$

udsagn

"for alle"

"gælder"

bunden variabel

Universel kvantor

universet / domænet (udelades sommetider,
hvis det er underforstået)

"For alle x i mængden af positive heltal gælder $2x > x$ "

Eller

"For alle positive heltal x gælder $2x > x$ "

Eller

"For ethvert positivt heltal x gælder $2x > x$ "

Derimod er $P(x)$ ikke sand for alle heltal x :

$$\neg \forall x \in \mathbb{Z} : 2x > x$$

(F.eks. er $P(x)$ ikke sand for $x = -2$.)

More notation:

Eks: $Q(x): 2x > x+4$

For hvilke x -værdier er $Q(x)$ sand?

$$2x > x+4 \Leftrightarrow x > 4$$

$$\begin{aligned} & Q(5) \wedge Q(6) \wedge Q(7) \wedge \dots && \textcircled{S} \\ \Updownarrow & \forall x \in \{5, 6, 7, \dots\} : Q(x) \\ \Updownarrow & \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 5 : Q(x) \\ \Updownarrow & \forall x \in \mathbb{Z} : \underbrace{(x \geq 5 \Rightarrow 2x > x+4)}_{R(x)} && (*) \end{aligned}$$

Bemærk:

(*) illustrerer, at def. af „ $\Rightarrow$ ” er meningsfuld:

$$\begin{aligned} & \vdots \\ R(3): & \text{ F } \Rightarrow \text{ F } && S \\ R(4): & \text{ F } \Rightarrow \text{ F } && S \\ R(5): & \text{ S } \Rightarrow \text{ S } && S \\ R(6): & \text{ S } \Rightarrow \text{ S } && S \\ & \vdots \end{aligned}$$

$S \Rightarrow F$ opstår ikke

$$\begin{aligned} & \forall x \in \{6, 7, 8, \dots\} : 2x > x+4 && \textcircled{S} \text{ (følger af (*))} \\ \Updownarrow & \forall x \in \mathbb{Z} : \underbrace{x \geq 6 \Rightarrow 2x > x+4}_{T(x)} && (***) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ T(4): & \text{ F } \Rightarrow \text{ F } \\ T(5): & \text{ F } \Rightarrow \text{ S } \\ T(6): & \text{ S } \Rightarrow \text{ S } \\ & \vdots \end{aligned}$$

$S \Rightarrow F$ opstår ikke

Da (***) følger af (*), er (*) et stærkere udsagn end (***)
(Der er mere information i (*) end i (**).)

Eks: $Q(x) : 2x > x+4$ (som i foregående eks.)

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z}^+ : Q(x) \\ \Leftrightarrow & Q(1) \wedge Q(2) \wedge Q(3) \wedge \dots \quad \textcircled{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee \dots \quad \textcircled{S} \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{Z}^+ : Q(x) \end{aligned}$$

↑ "Der eksisterer" "sådan at"

Eksistentiel kvantor

$$\exists x \in \mathbb{Z} : Q(x) \quad \textcircled{S}$$

$$\begin{aligned} & \exists x \in \{10, 11, 12, \dots\} : Q(x) \quad \textcircled{S} \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{Z}, x \geq 10 : Q(x) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{Z} : x \geq 10 \wedge Q(x) \end{aligned}$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 2 : Q(x) \quad \textcircled{F}$$

Eks:

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad \textcircled{S} \quad (x=0)$$

Ovenstående udsagn kan præciseres:

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad \textcircled{S}$$

↑
"Der eksisterer præcis ét"

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x \cdot x \quad \textcircled{F} \quad (x=0, x=1)$$

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 \quad \textcircled{F}$$

Kvantorer har højere præcedens end de logiske operatoren

$$\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow \oplus$$

Eks:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \leq 3 \vee x \geq 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{Z} : (x \leq 3 \vee x \geq 4) \quad \text{!} \\ (\forall x \in \mathbb{Z} : x \leq 3) \vee x \geq 4 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Negering af kvantificerede udsagn

Eks:

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 &\equiv \text{F} \\ \Downarrow \quad \neg \forall x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 &\equiv \text{S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad \neg \forall x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 \\ \Downarrow \quad \exists x \in \mathbb{Z} : \neg(2x \geq 4) \\ \Downarrow \quad \exists x \in \mathbb{Z} : 2x < 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad \exists x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 &\equiv \text{S} \\ \Downarrow \quad \neg \exists x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 &\equiv \text{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad \neg \exists x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 \\ \Downarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z} : \neg(2x \geq 4) \\ \Downarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z} : 2x < 4 \end{aligned}$$

Eks:

T : mængden af studerende, som er tilmeldt
DM549 / MM537 / MM540

$P(x)$: x deltager i denne forelæsning

$$\neg \forall x \in T: P(x) \Leftrightarrow \exists x \in T: \neg P(x)$$

$$\forall x \in T: \neg P(x) \Rightarrow \neg \forall x \in T: P(x)$$

~~$\Leftarrow$~~

Generelt:

De Morgans Love for Kvantorer
$\neg \forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$
$\neg \exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$

Man skriver også $\nexists$ i stedet for $\neg \exists$

Eks: $\neg \forall x \in \mathbb{N} : (2x \geq 4 \vee 2x \geq 2^x)$
 $\Updownarrow$
 $\exists x \in \mathbb{N} : (2x < 4 \wedge 2x < 2^x)$ S (x=0)

Udsagn kan præciseres:

$$\exists! x \in \mathbb{N} : (2x < 4 \wedge 2x < 2^x)$$

Åbne udsagn kan have mere end én fri variabel.

Eks: $P(x, y) : x + y = 0$

$$P(2, -2) \equiv \text{S}$$

$$P(2, 0) \equiv \text{F}$$

Generelt:

$$P(x, y) \Leftrightarrow x = -y$$

Indlejrede kvantorer (afsnit 1.5)

Eks: $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x+y = 0$ S

Er sandt, hvis nedenstående er muligt:

For hvert $x \in \mathbb{Z}$:

Find et $y \in \mathbb{Z}$, så:

$$x+y=0$$

Vælg $y = -x$

D.v.s. y må gerne afhænge af x

Har kvantorenes orden betydning?

$\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x+y = 0$ F

Er sandt, hvis nedenstående er muligt:

Find et $y \in \mathbb{Z}$, så:

Enhvert $x \in \mathbb{Z}$ opfylder:

$$x+y=0$$

Her skal vi vælge et y , der passer sammen med alle $x \in \mathbb{Z}$.

Generelt: $\exists y : \forall x : Q(x,y) \Rightarrow$
 $\forall x : \exists y : Q(x,y)$

D.v.s. $\exists y : \forall x : Q(x,y)$ er et stærkere udsagn

end $\forall x : \exists y : Q(x,y)$,