

Sidste gang: Kvantorer

$$\forall x \in \mathbb{Z} : 2x > x+4 \quad F$$

$$\forall x \in \{5, 6, 7, \dots\} : 2x > x+4 \quad S$$

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 5 : 2x > x+4 \quad S$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : (x \geq 5 \Rightarrow 2x > x+4) \quad S$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : 2x > x+4 \quad S$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x > 10 : 2x > x+4 \quad S$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : (x > 10 \wedge 2x > x+4) \quad S$$

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : 2x > x+4 \quad F$$

De Morgans Love for Kvantorer

$$\neg \forall x : P(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg \exists x : P(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$$

Eks:

Deltagelse i
forelæsning

Indlejrede kvantorer

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x+y = 0 \quad S$$

$$\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x+y = 0 \quad F$$

← stærkere end

1 dag:

Mere om indlejrede kvantorer (afsnit 1.5)

Bevismetoder (afsnit 1.7-1.8)

Eks:

S : Mængden af studerende i DM549 / MM537 / MM540

H : Mængden af hobbies

$P(x,y)$: x har y som hobby

(Kvantorenes orden:)

$\forall x \in S: \exists y \in H: P(x,y)$

Alle studerende i de tre kurser har en hobby.

$\exists y \in H: \forall x \in S: P(x,y)$

Der er en hobby, som deles af alle studerende i de tre kurser.

(Negering:)

$\neg \forall x \in S: \exists y \in H: P(x,y)$

$\Leftrightarrow \exists x \in S: \neg \exists y \in H: P(x,y)$, ifølge De Morgan

$\Leftrightarrow \exists x \in S: \forall y \in H: \neg P(x,y)$, ifølge De Morgan

Der er en studerende, som ikke har nogen hobby.

$\neg \exists y \in H: \forall x \in S: P(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall y \in H: \exists x \in S: \neg P(x,y)$ ved anvendelse af De Morgan x2

Ingen hobby deles af alle.

Eks: (negering)

$$\begin{aligned} & \Downarrow \neg \exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x > y \\ & \Downarrow \forall x \in \mathbb{Z} : \neg \forall y \in \mathbb{Z} : x > y \\ & \Downarrow \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : \neg (x > y) \\ & \Downarrow \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq y \end{aligned}$$

Eks: (Ens kvantorer)

Når kvantorene er ens, må man gerne bytte om på rækkefølgen:

$$\begin{aligned} & \Downarrow \forall x \in \mathbb{Z}^+ : \forall y \in \mathbb{Z}^+ : (x > y \Rightarrow 2x > y) \\ & \Downarrow \forall y \in \mathbb{Z}^+ : \forall x \in \mathbb{Z}^+ : (x > y \Rightarrow 2x > y) \\ & \Downarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}^+ : (x > y \Rightarrow 2x > y) \end{aligned}$$

Sidste omskrivning er mulig, fordi x og y har samme univers ($\mathbb{Z}^+$).

Se Tabel 1.5.1 på s. 63

Eks: (Tre kvantorer)

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall z \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z \quad S$$

For hvert $x \in \mathbb{Z}^+$

Vælg et $y \in \mathbb{Z}^+$, så

Ethvert $z \in \mathbb{Z}^+$ opfylder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

Vælg $y = x$

$$\frac{x}{y} = 1 \leq z, \text{ da } z \in \mathbb{Z}^+$$

Her kan y afhænge af x (men ikke af z).

Kan man bytte om på de to $\forall$ i dette eks?

Nej (og det skyldes, at der er en $\exists$ i mellem)

$$\forall z \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall x \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z$$

For ethvert $z \in \mathbb{Z}^+$

Find et $y \in \mathbb{Z}^+$, så

Ethvert $x \in \mathbb{Z}^+$ opfylder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

Eks: $z = 1 \wedge x = 2y \Rightarrow$

$$\frac{x}{y} = 2 > 1 = z$$

Her kan y afhænge af z , men ikke af x .

Bevismetoder (afsnit 1.7)

Hovedtyper:

Direkte bevis

Benyttes, at $(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

n ulige $\nearrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k+1$ $\nearrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ $\nearrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ $\nearrow$ n^2 ulige

Kontrapositions bevis

Benyttes, at $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

n^2 ulige $\nearrow$ p $\nearrow$ q $\Leftrightarrow$ $\neg q$ $\nearrow$ $\neg p$ $\nearrow$ p

n lige $\downarrow$ n^2 lige

Modstridsbevis

Benyttes, at $(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow p$

$\neg \exists$ uge med ≥ 2 fødselsdage ≤ 52 personer $\exists$ uge med ≥ 2 fødselsdage

$\exists$ $\triangle$ a, b, c : $c > a+b$ $\nearrow$ $\neg p$ $\nearrow$ F $\nearrow$ p $\nearrow$ $\forall$ $\triangle$ a, b, c : $c \leq a+b$

$\exists$ $\triangle$ a, b, c : $c^2 > a^2 + b^2$

I de første eksempler skal vi bruge flg. def.

Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder

$$n \text{ lige} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k$$

$$n \text{ ulige} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k+1$$

(Def. 1.7.1)

Two heltal har samme paritet, hvis begge er lige, eller begge er ulige

Eks 1.7.1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder
 $n \text{ ulige} \Rightarrow n^2 \text{ ulige}$

Beris: (Direkte beris)

$$\begin{array}{ll} \text{Def. 1.7.1} & \Updownarrow n \text{ ulige} \\ & \Updownarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k+1 \\ & \Updownarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n^2 = (2k+1)(2k+1) \\ & \Updownarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ & \Downarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n^2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1 \\ \text{Def. 1.7.1} & \Downarrow n^2 \text{ ulige} \end{array}$$

□

Eks 1.7.9: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder
 n^2 ulige $\Rightarrow n$ ulige

Kan vi bruge et direkte bevis igen?

Ikke umiddelbart:

$$n^2 = 2k+1 \Rightarrow n = \sqrt{2k+1} \Rightarrow ??$$

Hvis vi bruger kontraposition, får vi n i antagelsen og n^2 i konklusionen ligesom i Eks. 1.7.1 ovenfor:

Bevis: (Kontraposition)

$$\begin{aligned} & \neg(n \text{ ulige}) \\ & \Leftrightarrow n \text{ lige} \\ & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k \\ & \Downarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 4k^2 \\ & \Downarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 2 \cdot \underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}} \\ & \Downarrow n^2 \text{ er lige} \\ & \Leftrightarrow \neg(n^2 \text{ er ulige}) \quad \square \end{aligned}$$

Eks 1 og 9 viser tilsammen, at

$$\forall n \in \mathbb{Z}: n \text{ ulige} \Leftrightarrow n^2 \text{ ulige}$$

Eks: Der er to deltagere i denne forelæsning,
som har fødselsdag i samme uge.

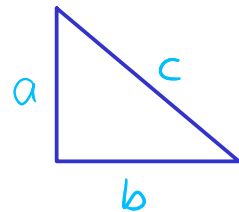
Bevis:

Antag til **modstrid**, at der ikke er nogen
uge med to fødselsdage.

Da er der ≤ 52 personer i lokalitet $\downarrow$ $\square$

NB: „to fødselsdage“ betyder
„mindst to fødselsdage“.
(I modsætning til „præcis to fødselsdage“.)

Eks: For enhver retvinklet trekant
gælder $c \leq a+b$



Bevis:

Antag til **modstrid**, at der eksisterer en
retvinklet trekant med $c > a+b$.

$$\begin{aligned} c &> a+b \\ \Downarrow \\ c^2 &> (a+b)^2 \\ \hat{=} \\ c^2 &> a^2 + b^2 + 2ab \\ \Downarrow \\ c^2 &> a^2 + b^2, \text{ da } 2ab \geq 0 \end{aligned}$$

$\downarrow$

Modstrid med Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

$\square$

Yderligere „tricks“ (Afsnit 1.8)

Split op

Eks: (delresultater)

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad \text{som i Eks 1+9}$$

$$p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3 \equiv p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow p_1$$

$$A = B \equiv A \leq B \wedge B \leq A$$

Eks (flere tilfælde)

Påstand: $\forall n \in \mathbb{Z}: \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \geq \frac{n}{2}$

$\lfloor \rfloor$ runder ned
($\lceil \rceil$ runder op)

Bevis: (To direkte beviser)

Tilfælde 1: n ulige

I dette tilfælde er $n+1$ lige

D.v.s. $\frac{n+1}{2}$ er et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}$$

Tilfælde 2: n er lige

I dette tilfælde er $\frac{n}{2}$ et heltal

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$$

□