

Sidste gang

Bevis-strategier: Simple specialtilfælde

Induktionsbeviser (afsnit 5.1)

$P(n)$

Eks: $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$

Basis: $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$

Ind. ant. ($k \geq 0$): $2^0 + 2^1 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$

Ind. skridt: For $k \geq 0$ gælder:

$$\updownarrow 2^0 + 2^1 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1, \text{ ifølge ind. ant.}$$

$$\updownarrow 2^0 + 2^1 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

$$\updownarrow 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

Vi har bevist:

$$P(0)$$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1), \text{ for } k \geq 0$$

Sidste gang beviste vi:

$$P(0)$$

$$P(k-1) \Rightarrow P(k), \text{ for } k \geq 1$$

Begge dele svarer til:

$$P(0)$$

$$P(0) \Rightarrow P(1)$$

$$P(1) \Rightarrow P(2)$$

$\vdots$

$P(n)$
Eks: $2^n < n!$, for alle $n \geq 4$

Basis: $2^4 = 16 < 24 = 4!$

Ind. ant. ($k \geq 5$): $2^{k-1} < (k-1)!$

Ind. skridt: For $k \geq 5$ gælder

$\Downarrow$ $2^{k-1} < (k-1)!$, ifølge ind. ant.

$2 \cdot 2^{k-1} < k(k-1)!$, da $k \geq 5$

$\Uparrow$ $2^k < k!$

Vi har bevist:

$P(4)$

$P(4) \Rightarrow P(5)$

$P(5) \Rightarrow P(6)$

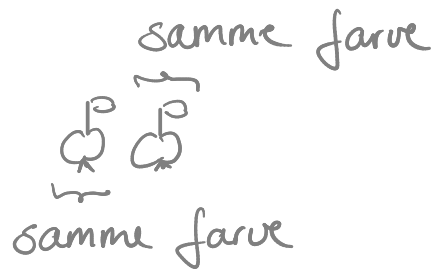
$\vdots$

Eks: Alle æbler har samme farve

Vi beviste

$P(1)$

~~$P(1) \Rightarrow P(2)$~~

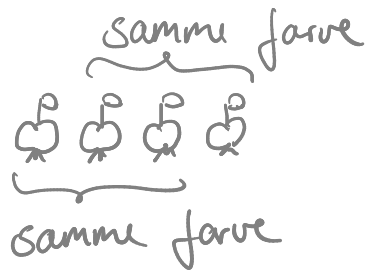


$P(2) \Rightarrow P(3)$



$P(3) \Rightarrow P(4)$

$\vdots$



Mængder: Afsnit 2.1-2.2

Def 2.1.1 (set)

En **mængde** er en uordnet samling af forskellige objekter, kaldet **elementer**.

$x \in A$: „ x tilhører A “
 x er et element i A .

$x \notin A$: „ x tilhører ikke A “
 x er ikke et element i A .

Eks: $A = \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 1, 1, 2, 3\}$
 $2 \in A$

$V = \{a, e, i, o, u, y\}$

$B = \{1, \{2, 4\}, a\}$

$1 \in B$

$\{2, 4\} \in B$

opremsning
(enumeration/
roster method)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{L} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

uendelig
opremsning

$$L = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k\}$$

$$= \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \mid x\}$$

„hvorum
der gælder“

„går op i“

mængde-bygger-
notation

(set builder
notation)

Mængde-bygger-notation : $\{ \langle \text{element} \rangle [\in \langle \text{univers} \rangle] \mid \langle \text{udsagn} \rangle \}$

$$\mathbb{Q}^+ = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+ \}$$

$$\{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$\{\} = \emptyset$ Den tomme mængde

(s. 124)

Def 2.1.4

$|S|$: kardinalitet af mængden S
#elementer i S , hvis S er endelig

Senere skal vi se på kardinalitet af uendelige mængder.

Eks :

$$|\{2, 4, 6\}| = 3 = |\{2, 2, 4, 6, 4\}|$$

$$|\{2, \{3, 4\}, 5\}| = 3$$

$$|\{\}| = 0$$

$$|\{\mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}^+\}| = 2$$

Venn-diagram

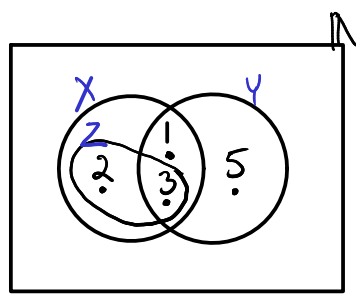
(S. 124-125)

Eks:

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$Y = \{1, 3, 5\}$$

$$Z = \{2, 3\}$$



universet

(universal set)

$$Z \subseteq X:$$

Def 2.1.3: Delmængde (Subset)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U : x \in A \Rightarrow x \in B$$

„A er en delmængde af B”

„A er indeholdt i B”

Eks:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

$$\{1, 2\} \subseteq \mathbb{N}$$

$$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$$

$$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$$

Sætning 2.1.1:

For enhver mængde A gælder:

- $A \subseteq A$, fordi

$$\forall x \in A : x \in A$$

- $\emptyset \subseteq A$, fordi

$$\forall x \in \emptyset : x \in A \quad \text{eller}$$

$$\forall x \in U : (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

Ägte delmængde (proper subset)

(S. 126)

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B \wedge \exists x \in B : x \notin A$$

Eks:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{X}$$

$$\emptyset \subset \mathbb{Z}$$

$$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$$

Def. 2.1.6: Potenzmenge

(Power set)

$$\mathcal{P}(A) = \{ \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq A \}$$

Ex:

$$A = \emptyset$$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset \}$$

$$B = \{ 1 \}$$

$$\mathcal{P}(B) = \{ \emptyset, \{ 1 \} \}$$

$$C = \{ 1, 2 \}$$

$$\mathcal{P}(C) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \} \}$$

$$D = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$\mathcal{P}(D) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 3 \}, \{ 1, 3 \}, \{ 2, 3 \}, \{ 1, 2, 3 \} \}$$

Bemerk:

$$|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$$

$$|\mathcal{P}(B)| = 2 = 2^1$$

$$|\mathcal{P}(C)| = 4 = 2^2$$

$$|\mathcal{P}(D)| = 8 = 2^3$$

Eks 5.1.10: En mængde S med n elementer har 2^n delmængder, for alle $n \geq 0$ D.v.s. $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$

Basis: Ved induktion over n

Basis: $n=0$

$\emptyset$ har 1 delmængde, nemlig $\emptyset$.

Ind. ant.:

En mængde med $k-1$ elementer har 2^{k-1} delmængder

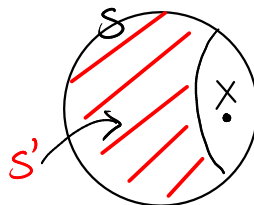
Ind. skridt: For $k \geq 1$ gælder:

Lad S være en vilkårlig mængde med k elementer.

Lad $x \in S$.

Lad $S' = S - \{x\}$.

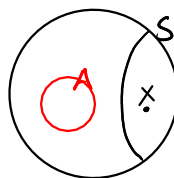
D.v.s. $|S'| = k-1$



S' har 2^{k-1} delmængder ifølge ind. ant.

For enhver delmængde $A \subseteq S$ er der to muligheder:

- $x \notin A$, dvs. $A \subseteq S'$
(2^{k-1} muligheder)



- $x \in A$, dvs. $A = \{x\} \cup A'$, hvor $A' \subseteq S'$
(2^{k-1} muligheder)



alt $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$ muligheder

□

Def 2.1.8: Kartesisk produkt

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

D.v.s. $A \times B$ er en mængde af 2-tupler

Eks: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$

$$A \times B = \{ (1,2), (1,3), (2,2), (2,3) \}$$

$$B \times A = \{ (2,1), (2,2), (3,1), (3,2) \}$$

Bemærk:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Intervaller:

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

lukket interval

$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

åbent interval

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$$

$$(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$$

halvåbent interval

(semi-open /
half-closed)

Afsnit 2.2: Mængde-operationer

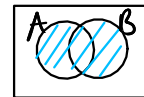
Eks: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
↑
Universet

Foreningsmængde (union)

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

↑
"forent med"

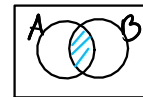


Fællesmængde / snitmængde (intersection)

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

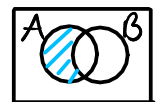
↑
"fælles med"



$$A - B = \{1\}$$

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

↑ ↑
"fraregnet"



$$\bar{A} = \{4, 5\}$$

Komplement af A: $\bar{A} = U - A$

