

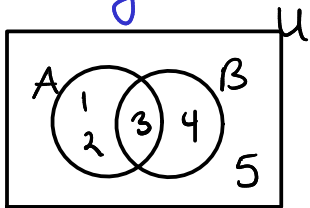
Sidste gang: Mængder (afsnit 2.1-2.2)

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{2, 1, 1, 3, 2\}$$

Mængde-bygger - notation

$$\{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\} \\ = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Venn-diagrammer



$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$$

Kardinalitet

$$|\{1, 2, 3\}| = |\{2, 1, 1, 3, 2\}| = 3$$

Delmængde

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$$

Ægte delmængde

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B \wedge A \neq B$$

Kartesiske produkt

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Mængde-operationer

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$\bar{A} = U - A$$

førelsmængde

A fraregnet B

komplement

Potensmængde

$$\mathcal{P}(S) = \{ A \mid A \subseteq S \}$$

Eks:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$$

$$\mathcal{P}(\{1\}) = \{ \emptyset, \{1\} \}$$

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$$

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

Eks 5.1.10: En mængde S med n elementer har 2^n delmængder, for alle $n \geq 0$

D.v.s.

$$|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$$

Basis: Ved induktion over n

Basis: $n=0$

$\emptyset$ har 1 delmængde, nemlig $\emptyset$.

Ind. ant.:

En mængde med $k-1$ elementer har 2^{k-1} delmængder

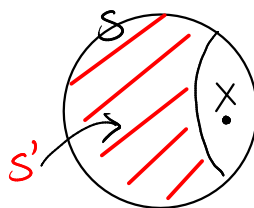
Ind. skridt: For $k \geq 1$ gælder:

Lad S være en vilkårlig mængde med k elementer.

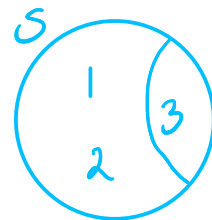
Lad $x \in S$.

Lad $S' = S - \{x\}$.

D.v.s. $|S'| = k-1$



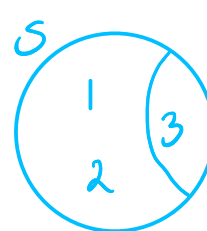
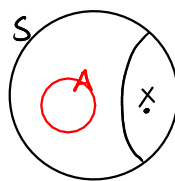
Eks:



S' har 2^{k-1} delmængder ifølge ind. ant.

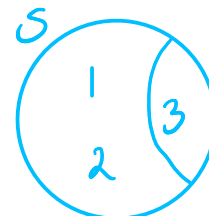
For enhver delmængde $A \subseteq S$ er der to muligheder:

- $x \notin A$, dvs. $A \subseteq S'$
(2^{k-1} muligheder)



$\emptyset$
 $\{1\}$
 $\{2\}$
 $\{1,2\}$

- $x \in A$, dvs. $A = \{x\} \cup A'$, hvor $A' \subseteq S'$
(2^{k-1} muligheder)



$\{3\}$
 $\{1,3\}$
 $\{2,3\}$
 $\{1,2,3\}$

alt $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$ muligheder

□

1 dag

Lidt mere om **mængder** (afsnit 2.2)
Funktioner (afsnit 2.3)

Tabel 2.2.1 : Mængde-love

(S. 136) (S. 29)
 Tabel 221 $\sim$ Tabel 136:

$$\cup \sim \vee$$

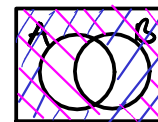
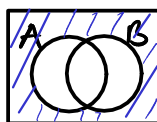
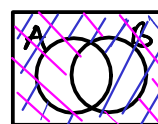
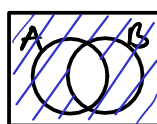
$$\cap \sim \wedge$$

$$\overline{} \sim \neg$$

De Morgans Love:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



Lidt mere notation og terminologi:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad (\text{Def. 2.2.6})$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \quad (\text{Def. 2.2.7})$$

(disjoint)

$$A \text{ og } B \text{ er } \text{disjunkte} \iff A \cap B = \emptyset$$

$$\iff A - B = A$$

$$\iff A \subseteq \bar{B}$$

Funktioner

(afsnit 2.3)

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin(x)$$

En funktion er først fuldt specificeret, når vi har angivet definitionsområdet og sekundærområdet.

Def 1+2

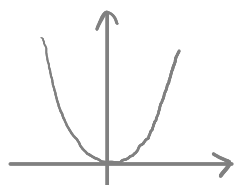
En funktion $f: A \rightarrow B$ tildeler præcis et element fra B til hvert element i A .

A : Definitionsområdet ($Dm(f)$) (domain)

B : Sekundærområdet (codomain)

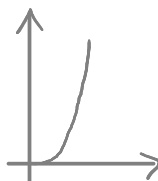
Eks:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$



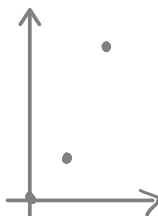
$$Vm(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$



$$Vm(g) = \mathbb{R}^+$$

$$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, h(x) = x^2$$



$$Vm(h) = \{0, 1, 4, \dots\}$$

Def. 4

(image / range)

Voerdimængden / billedmængden for en funktion $f: A \rightarrow B$ er

$$\begin{aligned} \text{Vm}(f) &= \{ y \in B \mid \exists x \in A: f(x) = y \} \\ &= \{ f(x) \mid x \in A \} \\ &= f(A) \end{aligned}$$

Def. 5

f er injektiv/en-til-en, hvis

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dm}(f) : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dm}(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

D.v.s. der er ikke to forskellige x -værdier med samme funktionsværdi.

Eks fra før:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

$$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, h(x) = x^2$$

f er ikke injektiv, da f.eks. $f(-1) = f(1)$.

g er injektiv:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_2) \\ \Leftrightarrow x_1^2 &= x_2^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ da } \text{Dm}(g) = \mathbb{R}^+$$

h er injektiv:

Samme argument som for g , da $\text{Dm}(h)$ heller ikke indeholder negative tal.

Def. 7

$f: A \rightarrow B$ er surjektiv/på, hvis
 $\forall y \in B: \exists x \in A: f(x) = y$

D.v.s. f er surjektiv, hvis $V_m(f) = B$.

I eksemplet fra før er ingen af funktionerne surjektive. Nyt eks:

Eks:

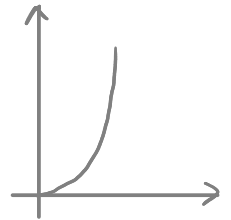
$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$ er surjektiv:

For ethvert $y \in \mathbb{R}^+$ gælder:

$$\Leftrightarrow f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}^+$$



D.v.s. for hvert y i f 's skudmængde findes der et x i def.mængden, så $f(x) = y$

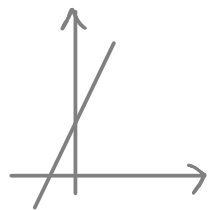
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 5$ er surjektiv:

For ethvert $y \in \mathbb{R}$ gælder:

$$\Leftrightarrow g(x) = y$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 = y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-5}{2} \in \mathbb{R}$$



Def. 8

Bijektiv: Både injektiv og surjektiv

Bijektion / en-til-en-korrespondance:

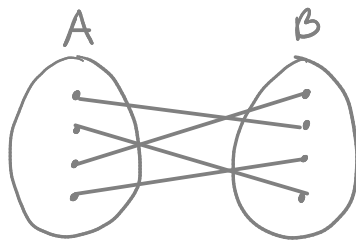
Funktion, som er bijektiv.

Altså:

Injektiv: Hver y -værdi „rammes“ af **højst** en x -værdi.

Surjektiv: Hver y -værdi „rammes“ af **mindst** en x -værdi.

Bijektiv: Hver y -værdi „rammes“ af **præcis** en x -værdi.



Funktionerne fra det seneste eksempel er bijektive.

Dermed er de invertible:

Def 9

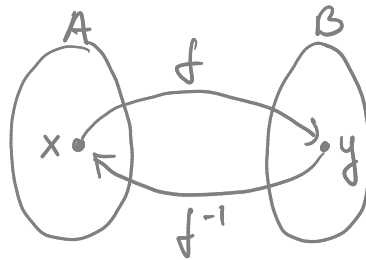
Lad $f: A \rightarrow B$ være en bijektion.

Den **inverse** funktion til f er funktionen $f^{-1}: B \rightarrow A$, som opfylder $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, for alle $x \in A$.

D.v.s.

$$\forall x \in A: f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\forall y \in B: f(f^{-1}(y)) = y$$



Eks: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 5$

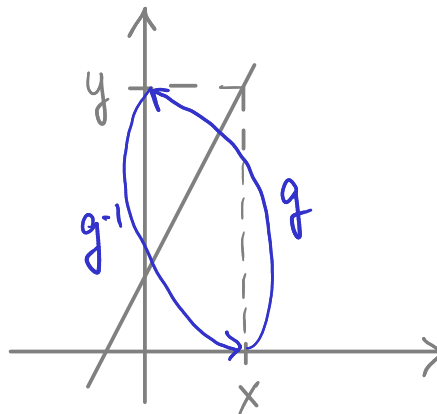
$$\begin{aligned} 2x + 5 &= y \\ \Leftrightarrow x &= \frac{y-5}{2} \end{aligned}$$

D.v.s.

$$g^{-1}(y) = \frac{y-5}{2}$$

Eller

$$g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$



Check:

$$g(g^{-1}(x)) = g\left(\frac{x-5}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x-5}{2} + 5 = x - 5 + 5 = x$$

$$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(2x+5) = \frac{2x+5-5}{2} = x$$

Funktioner kan kombineres til nye funktioner:

Def 3

Lad $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ og $g: A \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Eks:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x+2$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x-1$$

$$(f+g)(x) = 2x+2 + x-1 = 3x+1$$

$$(f \cdot g)(x) = (2x+2)(x-1) = 2x^2 - 2$$

Def 10

Lad $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Eks:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 2$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x - 1$$

Her er $A=B=C$, så både $f \circ g$ og $g \circ f$ er defineret.

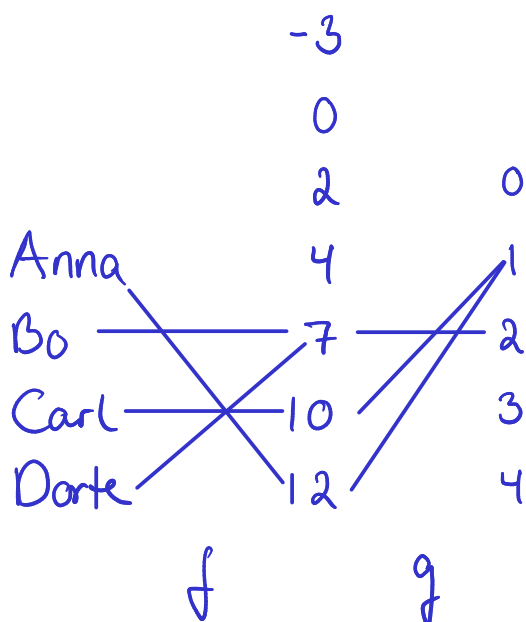
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = 2(x-1) + 2 = 2x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+2) = 2x+2-1 = 2x+1$$

Eks:

$f: \text{navn} \rightarrow \text{karakter}$

$g: \text{karakter} \rightarrow \text{antal}$



Hvor mange fik
samme karakter
som Dorte?

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\text{Dorte}) &= g(f(\text{Dorte})) \\ &= g(12) \\ &= \underline{\underline{2}}\end{aligned}$$

Def 6

Funktioner kan være

Voksende:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Strengt voksende:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Aftagende:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Strengt aftagende:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Monoton:

Voksende eller aftagende

Bemærk: En kontinuert funktion er injektiv, hvis den er enten strengt voksende eller strengt aftagende.