

Sidste gang

Stærk induktion (afsnit 5.2)

Eks: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4: \exists a, b \in \mathbb{N}: \overbrace{n = 2a + 5b}^{P(n)}$

Bevis ved stærk induktion over n :

$$P(4)$$

$$P(5)$$

$$P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow \dots$$

$$P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow P(9) \Rightarrow \dots$$

Relationer (afsnit 9.1 og 9.3)

En relation på A er en delmængde af $A \times A$ (Def 9.1.2)

Egenskaber

Refleksiv: $\forall a \in A: aRa$ (Def. 9.1.3)

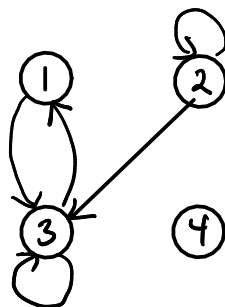
Symmetrisk: $\forall a, b \in A: aRb \Rightarrow bRa$

Antisymmetrisk: $\forall a, b \in A, a \neq b: aRb \Rightarrow b \not R a$ } (Def. 9.1.4)

Eks: Relation på $\{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Hverken refleksiv,
symmetrisk eller
antisymmetrisk.

1 dag

En egenskab mere: **transitiv**
Sammensætning af relationer: $S \circ R$
Lukninger (Afsnit 9.4)
Ækvivalensrelationer (Afsnit 9.5)

} Afsnit 9.1

Næste gang

Partielle ordninger (afsnit 9.6)

Lukninger (afsnit 9.4)

R : relation på A

Den **refleksive lukning** af R er

$$r(R) = R \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$$

D.v.s. den refleksive lukning skabes ved at tilføje præcis de elementer, der mangler for, at R er refleksiv.

Eks: Relation på $\{1,2,3,4\}$:

$$R = \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$$

$$\begin{aligned} r(R) &= R \cup \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} \\ &= \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,4)\} \end{aligned}$$

Eks: Relation på $\mathbb{N}$: $R_< = \{(a,b) \mid a < b\}$

$$\begin{aligned} r(R_<) &= R_< \cup \{(a,a) \mid a \in \mathbb{N}\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\} \\ &= R_{\leq} \end{aligned}$$

Mere generelt:

Def. 9.4.1

R : relation, P : egenskab

Lukningen af R mht. P (hvis den eksisterer)

er den mængde C , som opfylder

(1) $R \subseteq C$

(2) C har egenskaben P

(3) For enhver relation S , som opfylder (1) og (2),
gælder $C \subseteq S$.

D.v.s. C er den mindste mængde, som indeholder R
og har egenskaben P .

D.v.s.

Den symmetriske lukning af en relation R er
 $s(R) = R \cup \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

Eks:

$$s(R_<) = R_< \cup R_> = R_{\neq}$$

$$s(R_{\leq}) = R_{\leq} \cup R_{\geq} = A \times A$$

$$s(\text{"samme paritet"}) = \text{"samme paritet"}$$

$$s(R) = R \cup \{(3,2)\}$$

$$= \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

Antisymmetrisk lukning?

Eksisterer ikke, da man ikke kan gøre en ikke antisymmetrisk relation antisymmetrisk ved at tilføje par.

Oef. 9.1.5

R : relation på A

R er transitiv, hvis

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R, \text{ for alle } a,b,c \in A$$

Eks:

✓: $\leq, <, =, |$

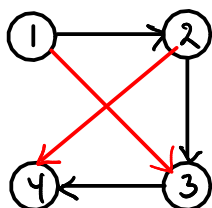
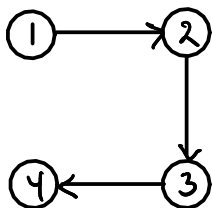
✗: $\neq, S = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

Eks: $S = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

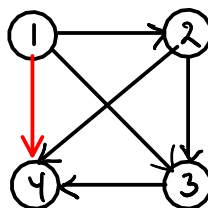
Den transitive lukning af S er:

$$\begin{aligned} S \circ S &= S^2 & S \circ S \circ S &= S \circ S^2 = S^2 \circ S = S^3 \\ t(S) &= S \cup \{(1,3), (2,4)\} \cup \{(1,4)\} \\ &= \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\} \end{aligned}$$

G_S :



$G_{t(S)}$:



Kombinationer af relationer

Relationer er mængder, og kan kombineres v.h.a. mængde-operationer: $\cup, \cap, -, \oplus$ (se Eks. 9.1.17-19)

Relationer er også en generalisering af funktioner, og kan sættes sammen, præcis som funktioner:

Def. 9.1.6:

R : relation fra A til B

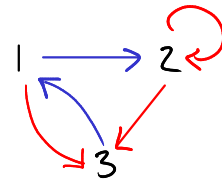
S : relation fra B til C

$$S \circ R = \{ (a, c) \mid \exists b : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S \}$$

Eks.:

$$R = \{ (1, 2), (3, 1) \}$$

$$S = \{ (1, 3), (2, 2), (2, 3) \}$$

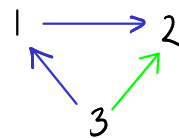


$$S \circ R = \{ (1, 2), (1, 3), (3, 3) \}$$

$$R \circ S = \{ (1, 1), (2, 1) \}$$

$$R^2 = R \circ R = \{ (3, 2) \}$$

$$R^3 = R \circ R^2 = R^2 \circ R = \{ \}$$



Bemærk:

$$(a, b) \in R^k \iff \exists \text{ vej af længde } k \text{ i } G_R$$

$$R^* = R \cup R^2 = \{ (1, 2), (3, 1), (3, 2) \}, \text{ fordi:}$$

Def. 9.4.3	$R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$
------------	---

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{|A|} R^i, \text{ hvis } A \text{ er endelig, fordi:}$$

Hvis der er en vej fra a til b , er der en vej fra a til b af længde højst $|A|$.

Sætning 9.4.2

Den transitive lukning af en relation R er $t(R) = R^*$

Ækvivalensrelationer (afsnit 9.5)

Def 9.5.1

En relation, som er reflektiv, symmetrisk og transitiv, kaldes en ækvivalensrelation.

Eks:

✓: =, samme paritet

✗: $\leq$, $|$, $\neq$