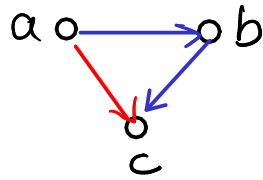


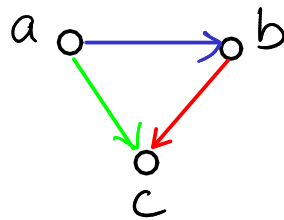
Sidste gang

Relationer

Transitiv: $\forall a, c: ((\exists b: aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$



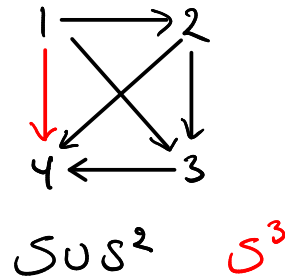
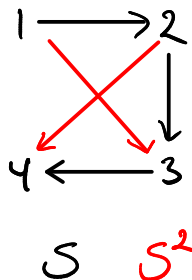
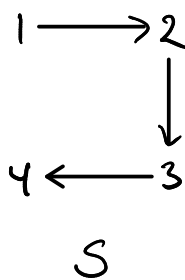
$$S \circ R = \{ (a, c) \mid \exists b: aRb \wedge bSc \}$$



$$R^2 = R \circ R$$

Lukninger af R mht P er den mindste relation, som indeholder R og har egenskaben P .

Eks: $S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$



$$S^4 = \{ \}$$

$$t(S) = S \cup S^2 \cup S^3 = \bigcup_{i=1}^{\infty} S^i = S^*$$

1 dag

Def. 9.5.1

En relation, som er refleksiv, symmetrisk og transitiv, kaldes en ækvivalensrelation.

Def. 9.6.1

En relation, som er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv, kaldes en partiel ordning.

Hassediagram

Total ordning

Leksikografisk ordning

Ækvivalensrelationer

(Afsnit 9.5)

Eks:

$\checkmark$: $=$, samme paritet

$\times$: $\neq$, $<$, $>$, $\subset$, $|$

Def. 9.5.2:

Hvis R er en ækv.rel., og $(a,b) \in R$, kaldes a og b ækvivalente.

Def 9.5.3

Lad R være en ækv.rel. på A , og lad $a \in A$.

Da er a 's ækvivalensklasse

$$[a]_R = \{b \mid (a,b) \in R\}$$

$$= \{b \mid (b,a) \in R\}$$

Eks: $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ og } b \text{ har samme paritet}\}$

$$[0]_R = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$[1]_R = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$[2]_R = [0]_R = [4]_R = \dots$$

$$[3]_R = [1]_R = [5]_R = \dots$$

Bemærk: $[0]_R \dot{\cup} [1]_R = \mathbb{N}$ ($\dot{\cup}$: disjunkt forening)

Eks: $S = \{(a,b) \mid a=b\}$ på $\mathbb{N}$

$$[0] = \{0\}$$

$$[1] = \{1\}$$

$$[2] = \{2\}$$

$$\vdots$$

$$\text{Igen: } \mathbb{N} = [0] \dot{\cup} [1] \dot{\cup} [2] \dot{\cup} \dots$$

Øvelse 9.5.1:

Lad R være en ækv. rel. Da gælder:

$$\updownarrow \quad aRb \quad (i)$$

$$\updownarrow \quad [a]_R = [b]_R \quad (ii)$$

$$\updownarrow \quad [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \quad (iii)$$

Beris

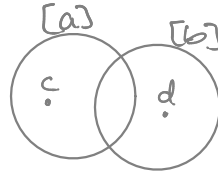
Vil bevise $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$

$$\underline{aRb \Rightarrow [a] = [b] : \quad ((i) \Rightarrow (ii))}$$

Antag, aRb .

Da gælder også bRa , da R er **symmetrisk**

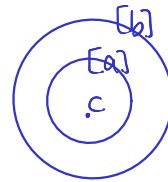
Kunne man forestille sig:



Nej:

$$\underline{[a] \subseteq [b] :}$$

$c \in [a]$
 $\Updownarrow$ aRc , per def.
 $\Downarrow$ bRc , da bRa og R er **transitiv**
 $\Updownarrow$ $c \in [b]$ per def.



$$\underline{[b] \subseteq [a] :}$$

Helt tilsvarende:

$d \in [b]$
 $\Updownarrow$ bRd , per def.
 $\Downarrow$ aRd , da aRb og R er **transitiv**
 $\Updownarrow$ $d \in [a]$



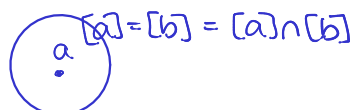
$$\text{O.v.s. } [a] = [b]$$

$$\underline{[a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset : \quad ((i) \Rightarrow (ii))}$$

$$\Downarrow [a] = [b]$$

$$\Downarrow [a] \cap [b] = [a]$$

$$\Downarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset, \text{ da } a \in [a], \text{ fordi } R \text{ er } \text{refleksiv}$$



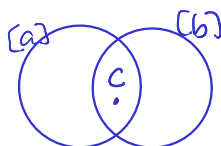
$$\underline{[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow aRb : \quad ((iii) \Rightarrow (i))}$$

$$\Uparrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$$\Uparrow \exists c : aRc \wedge bRc$$

$$\Uparrow \exists c : aRc \wedge cRb, \text{ da } R \text{ er } \text{symmetrisk}$$

$$\Uparrow aRb, \text{ da } R \text{ er } \text{transitiv}$$



Soetning 1 kan bruges til at bevise:

Soetning 9.5.2

For enhver mængde A gælder:

(1) R er en ækv.rel. på $A \Rightarrow$

(disjunkt opdeling)

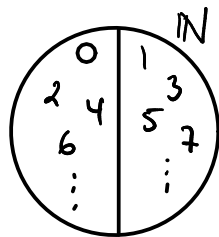
R 's ækv.klasser udgør en partitionering af A

Og omvendt:

(2) For enhver partitionering P af A findes der en ækv.rel., hvis ækv.klasser netop er mængderne i P .

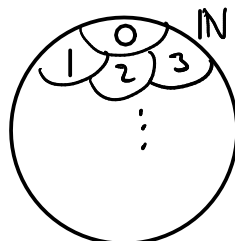
Eks: Relation på $\mathbb{N}$:

$$R = \{(a,b) \mid a \text{ og } b \text{ har samme paritet}\}$$



Eks: Relation på $\mathbb{N}$:

$$S = \{(a,b) \mid a=b\}$$



Bevis for Sætning 9.5.2:

(1) Ækv. klasser $\rightarrow$ partitionering:

Ækv. klasserne dækker hele A :

For ethvert $a \in A$ gælder $a \in [a]$,
da R er **refleksiv**.

D.v.s. ethvert $a \in A$ er indeholdt i en ækv.klasse.

Ækv. klasserne er **disjunkte**:

Kontraposition:

$$\begin{aligned} [a] \cap [b] \neq \emptyset &\Rightarrow [a] = [b], \text{ ifølge Sætning 1} \\ \Updownarrow \\ [a] \neq [b] &\Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset \end{aligned}$$

D.v.s. ækvivalensklasser, der ikke er identiske,
er disjunkte.

(2) Partitionering $\rightarrow$ ækv. rel.:

Lad P være en partitionering af A .

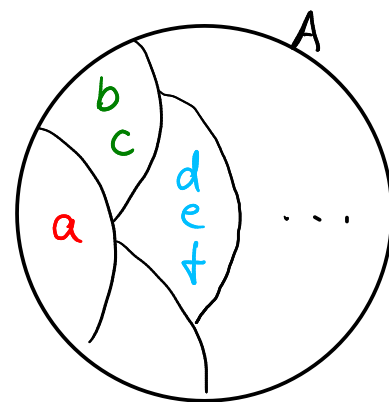
$R = \{(a,b) \mid a \text{ og } b \text{ tilhører samme mængde i } P\}$
er en ækv. rel.:

Refleksiv: For ethvert $a \in A$ gælder
a tilhører samme mængde som a.

Symmetrisk: For alle $a, b \in A$ gælder
b tilhører samme mængde
som c $\Rightarrow$

c tilhører samme mængde som b

Transitiv: For alle $d, e, f \in A$ gælder
d tilhører samme mængde som e, og
e tilhører samme mængde som f $\Rightarrow$
d tilhører samme mængde som f



Mængderne i P udgør R 's ækv. klasser,
da hvert element i A er relateret netop
til de elementer, der er i samme mængde.
D.v.s. hver mængde S i P er ækv. klasse
for hvert element i S .

Partielle ordninger

(afsnit 9.6)

Def 9.6.1

Hvis en relation R på en mængde A er
refleksiv, **antisymmetrisk** og transitiv,
kaldes den en **partiel ordening**.

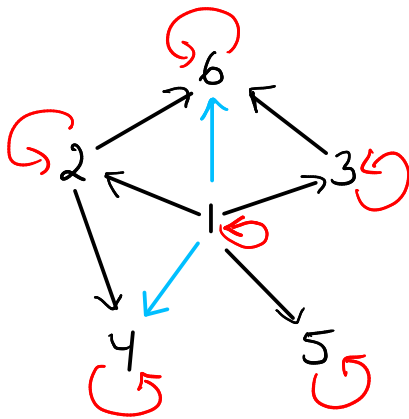
(A, R) kaldes en **partielt ordnet mængde** (poset)

Eks:

$\checkmark$: $\leq = | \subseteq$

$\times$: $< \neq \subset$ "samme paritet"
↑
× refl. × trans. × antisym.

Eks: $R = \{(a,b) \mid a|b\}$ på $\{1,2,3,4,5,6\}$



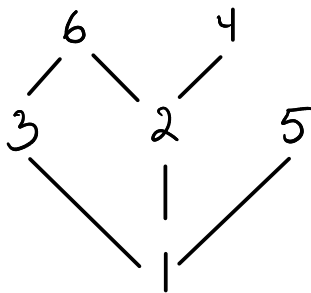
↪ følger af egenskaben
refleksiv

→ følger af egenskaben
transitiv

Hasse-diagram

Som graf, men:

- Udelad kanter, som kan udledes af egenskaberne refleksiv og transitiv.
- Tegn a under b , hvis aRb



Def 9.6.2

Lad $\preceq$ være en partiel ordning.
Hvis $a \preceq b$ eller $b \preceq a$, kaldes a og b sammenlignelige.

Def. 9.6.3

Lad $(A, \preceq)$ være en partielt ordnet mængde.
Hvis alle par $a, b \in A$ er sammenlignelige,
kaldes $\preceq$ en total ordning

Eks:

$\sqrt{}: \leq$

$\forall: =, |, \subseteq, <$

Eks: $R = \{(a, b) \mid a \leq b\}$ på $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
er en total ordning.

Hasse-diagram:



Leksikografisk ordning

Lad $\leq_1, \leq_2$ være partielle ordninger

$a <_1 b$ betyder $a \leq_1 b \wedge a \neq b$

$a <_2 b$ betyder $a \leq_2 b \wedge a \neq b$

$(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$, hvis

$a_1 <_1 b_1$

eller

$a_1 = b_1$ og $a_2 <_2 b_2$

Eks: Koordinat-sæt

$(1, 2) < (2, 4)$

$(1, 2) < (1, 3)$

Eks: Ordbog

abe < bil

abe < absolut