

Sidste gang

Ækvivalensrelationer (Refleksiv, symmetrisk, transitiv)

Ækvivalensklasser $\leftrightarrow$ partitionering

Partielle ordninger (Refleksiv, antisymmetrisk, transitiv)

Total ordning

Leksikografisk ordning

Hasse-diagram

Rekursive definitioner og struktural induktion (afsnit 5.3)

I uge 40 så vi, hvordan funktioner kan defineres rekursivt, f.eks. Fibonacci-tallene:

$$\left. \begin{array}{l} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{basis-skridt} \\ \text{rekursivt skridt} \end{array}$$

Vi brugte stærk induktion til at bevise, at $f_n > \varphi^{n-2} \approx 1,62^{n-2}$, for $n \geq 3$.

Nu skal vi se på, hvordan strukturer og mængder kan defineres rekursivt.

Derefter skal vi se, at struktural induktion kan være nyttigt til at bevise egenskaber ved rekursivt definerede mængder.

Eks 6: Bitstreng

λ : den tomme streng

$\Sigma = \{0,1\}$ kaldes alfabetet

Σ^* : mængden af bitstreng

$$\lambda \in \Sigma^*$$

$$B \in \Sigma^* \wedge b \in \Sigma \Rightarrow Bb \in \Sigma^*$$

Basis-skridt

Rekursivt skridt

$$\lambda \in \Sigma^*$$

Basis-skridt

$$0, 1 \in \Sigma^*$$

Rek. skridt anvendt en gang

$$00, 01, 10, 11 \in \Sigma^*$$

Rek. skridt anvendt to gange

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 \in \Sigma^*$$

$\vdots$

Ex 5:

$$3 \in S$$

Basis-skridt

$$x, y \in S \Rightarrow x+y \in S$$

Rekursivt skridt

Eller:

$$S_1 = \{3\}$$

Basis-skridt

$$S_n = S_{n-1} \cup \{x+y \mid x, y \in S_{n-1}\}, \quad n \geq 2$$

Rek.
skridt

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

$$S_1 = \{3\}$$

$$S_2 = \{3\} \cup \{3+3\} = \{3, 6\}$$

$$S_3 = \{3, 6\} \cup \{3+3, 3+6, 6+6\} = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$S_4 = \{3, 6, 9, 12\} \cup \{3+3, 3+6, \dots, 12+9, 12+12\}$$
$$= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$$

⋮

Eks 10: $S = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$, hvis S er def. som i Eks. 5

Bevis:

$A \subseteq S$: (Alle positive multipla af 3 er i S)

Induktion over n :

Basis: $3 \cdot 1 \in S, \in S$

Ind. ant.: $3n \in S$

Ind. skridt:

$$3(n+1) = \underbrace{3n}_{\in S} + \underbrace{3}_{\in S}$$

$\Downarrow$ $\in S$, ifølge ind. ant.

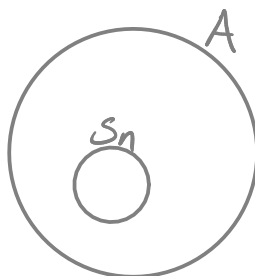
$3(n+1) \in S$, ifølge rek. skridt i def. af S .

$S \subseteq A$: (Alle elementer i S er positive multipla af 3)

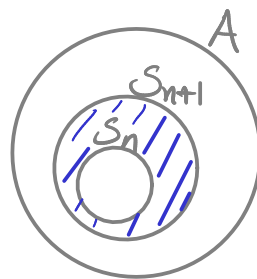
Strukturel induktion (d.v.s. ved induktion over #gange, det rek. skridt i def. er anvendt):

Basis: $S_1 \subseteq A$, da $3 = 3 \cdot \underbrace{1}_{\in \mathbb{Z}^+}$

Ind. ant.: $S_n \subseteq A$



Ind. skridt: $S_n \subseteq A \Rightarrow S_{n+1} \subseteq A$:



$$S \in S_{n+1} - S_n$$

$\Downarrow$

$S = x + y$, $x, y \in S_n$, ifølge rek. skridt i def. af S

$\Downarrow$

$S = 3k + 3l$, $k, l \in \mathbb{Z}^+$, ifølge ind. ant.

$\Downarrow$

$$S = 3(k+l), \quad k+l \in \mathbb{Z}^+$$

$\Downarrow$

$$S \in A$$

□

Strukturel induktion:

Beris $P(S_n)$, for alle $n \geq 1$

Beris $P(S_1)$

Beris $P(S_n) \Rightarrow P(S_{n+1})$, for alle $n \geq 1$

Def. 5.3.5: Fulde binære træer

$$S_1 = \{\bullet\}$$

(basisskridt)

$$S_n = S_{n-1} \cup \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ T_1 \quad T_2 \end{array} \mid T_1, T_2 \in S_{n-1} \right\}, n \geq 2$$

(rekursivt skridt)

venstre undertræ højre undertræ

D.v.s.

$$S_2 = \{\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\}$$

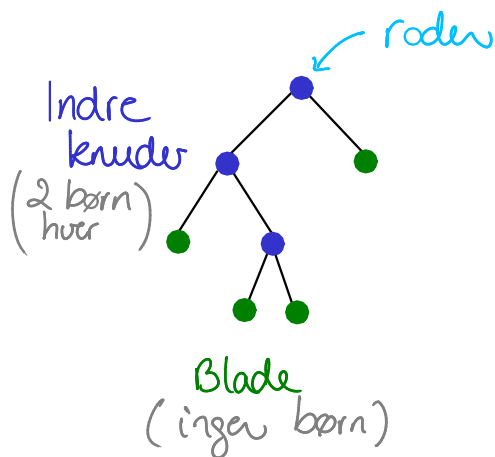
$$S_3 = \{\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\}$$

$$S_4 = \left\{ \text{---} \mid \text{---} , \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array} , \dots \right\}$$

$$(|S_4| = 26)$$

Lidt terminologi:

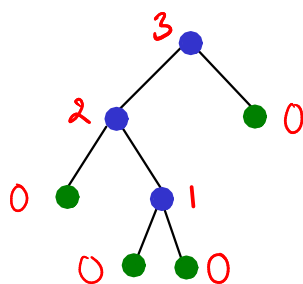
○ knude
 \ kant



Def 5.3.6

$$h(\circ) = 0$$

$$h\left(\begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ T_1 \quad T_2 \end{array}\right) = 1 + \max\{h(T_1), h(T_2)\}$$



højde ($h=3$):
 #kanter i længste sti
 fra roden til et blad

Sætning 5.3.2:

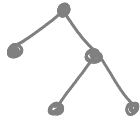
For ethvert fuldt binært træ T med $n(T)$ knuder og højde $h(T)$ gælder $n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$.

Eks :



$$n=3$$

$$h=1 \Rightarrow 2^{h+1} - 1 = 3$$



$$n=5$$

$$h=2 \Rightarrow 2^{h+1} - 1 = 7$$

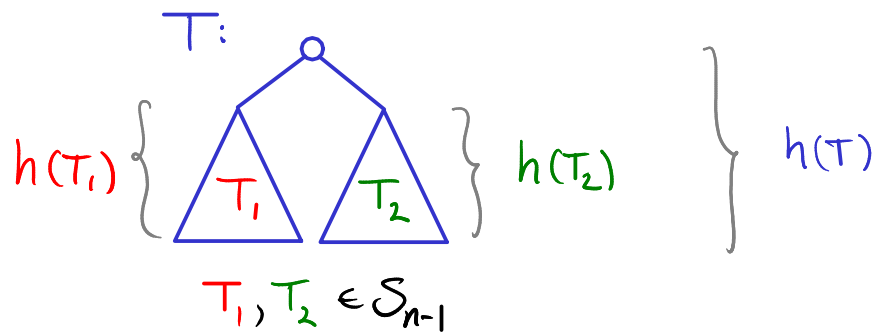
Basis: Ved strukturel induktion

Basis: $S_1 = \{\bullet\}$

$$h=0$$

$$\text{D.v.s. } 2^{h+1} - 1 = 1 = n$$

Ind. skridt: $T \in \mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{n-1}$, hvor $n \geq 2$



$$\begin{aligned}
 n(T) &= 1 + n(T_1) + n(T_2) \\
 &\leq 1 + 2^{h(T_1)+1} - 1 + 2^{h(T_2)+1} - 1, \quad \text{i\AA} \text{f\AA} \text{ølge ind. ant.} \\
 &= 2^{h(T_1)+1} + 2^{h(T_2)+1} - 1 \\
 &\leq 2^{h(T)} + 2^{h(T)} - 1, \quad \text{i\AA} \text{f\AA} \text{ølge Def. 5.3.6} \\
 &= 2^{h(T)+1} - 1
 \end{aligned}$$

□

(Kunne ogs\AA bevises ved sterk induktion over h\AAjden.)