

Sidste gang

Kinesiske Restklasse-Løsning

$$x \equiv 2 \pmod{4}$$

$$x \equiv 1 \pmod{7}$$

$$x \equiv 4 \pmod{11}$$

$$x \equiv 5 \pmod{15}$$

$$M = 4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 = 4620$$

$$M_1 = 7 \cdot 11 \cdot 15 = 1155,$$

$$1155 y_1 \equiv 1 \pmod{4} \Leftrightarrow y_1 = 3$$

$$M_2 = 4 \cdot 11 \cdot 15 = 660,$$

$$660 y_2 \equiv 1 \pmod{7} \Leftrightarrow y_2 = 4$$

$$M_3 = 4 \cdot 7 \cdot 15 = 420,$$

$$420 y_3 \equiv 1 \pmod{11} \Leftrightarrow y_3 = 6$$

$$M_4 = 4 \cdot 7 \cdot 11 = 308,$$

$$308 y_4 \equiv 1 \pmod{15} \Leftrightarrow y_4 = 2$$

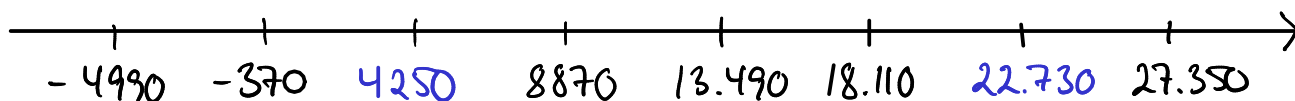
$$x = 1155 \cdot 3 \cdot 2 + 660 \cdot 4 \cdot 1 + 420 \cdot 6 \cdot 4 + 308 \cdot 2 \cdot 5$$

$$= 22.730$$

$\Downarrow$

$$x \equiv 4250 \pmod{4620}$$

$$\text{Lösungsmenge: } \{ 4250 + 4620k \mid k \in \mathbb{Z} \}$$



Fermats Lille Sætning

Lad $a, p \in \mathbb{Z}$, p primtal.

$$(1) p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$(2) a^p \equiv a \pmod{p}$$

Eks:

$$\begin{aligned} 7^{222} \pmod{11} &= (7^{10})^{22} \cdot 7^2 \pmod{11} \\ &= 1^{22} \cdot 7^2 \pmod{11} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Matricer

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 dag

Matricer

Neutrale matricer

Transponering

0-1-matricer

Grafer

Graftyper

Terminologi

Grafklasser

Neutrale matrixer

Eks:

$$A + O = A$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neutral matrix m.h.t. $+$: O

$$o_{ij} = 0$$

Eks: $A \cdot I_3 = A$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Den neutrale matrices dimensioner ligger fast:

- Med antallet af rækker sørger vi for, at der kan ganges på A .
- Med antallet af søjler sørger vi for, at resultatet har det rigtige antal søjler.

Og omvendt, når matricen ganges på venstre side:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$I_2 \cdot A = A$$

Def. 2.65: Identitetsmatrix

$n \times n$ matrix:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Lad M være en $n \times n$ -matrix

$$A^0 = I^n$$

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n, \text{ for } n \geq 1$$

Transponering

Eks:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Byt om på rækker og søjler:

$$m_{ij}^T = m_{ji} \quad (\text{Def. 2.6.6})$$

Eks:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kvadratiske matrixer: spejl omkring diagonalen

Def. 2.6.7

Hvis M er kvadratisk, og $M = M^T$, kaldes M symmetrisk.

0-1-matriser

0 ~ Falsk

1 ~ Sand

Def. 2.6.8

$M_1 \vee M_2$ beregnes som $M_1 + M_2$, men med
 $+ \rightsquigarrow \vee$

$M_1 \wedge M_2$ beregnes som $M_1 + M_2$, men med
 $+ \rightsquigarrow \wedge$

Eks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Def. 2.6.9: Boolsk produkt

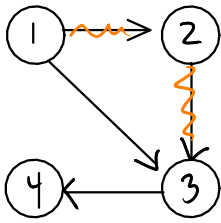
$M_1 \odot M_2$ beregnes som $M_1 \cdot M_2$, men med

$+ \rightsquigarrow \vee$

$\cdot \rightsquigarrow \wedge$

Eks: Adjacens

G:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A angiver alle kanter, dvs alle veje af længde 1, i G.
Hvilke veje af længde 2 findes der i G?

Der er en kant fra ① til ②, og videre fra ② til ③.

$$A \odot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^{[2]}$$

Hvordan findes veje af længde 3?

Def. 2.6.10

Hvis M er en $n \times n$ -matrix, gælder:

$$M^{[0]} = I_n$$

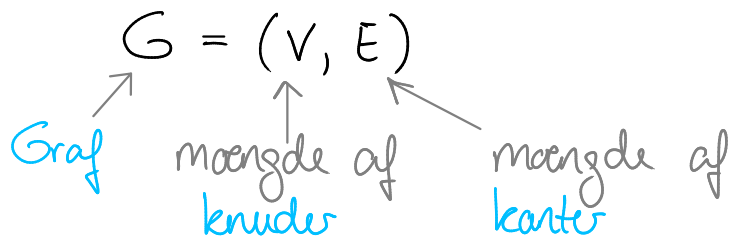
$$M^{[r]} = \underbrace{M \circ M \circ \dots \circ M}_{r \text{ gange}}, \text{ for } r \in \mathbb{Z}^+$$

Man kan selvfølgelig også beregne det boolske produkt af to ikke-kvadratiske matrixer (hvis deres dimensioner "passer sammen"). Se f.eks. Eks. 8.

Grafer Kapitel 10

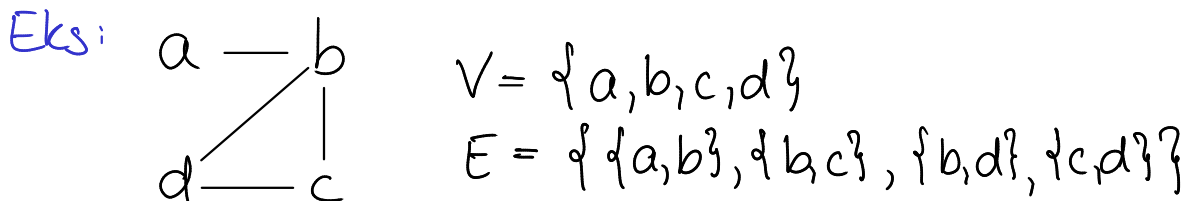
Graftyper (Afsnit 10.1)

Simple grafer Hverken parallelle kanter eller loops



Ikke-orienterede grafer:

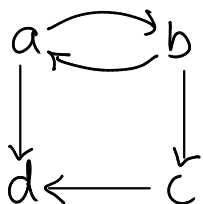
Kantene er uordnede par.



Orienterede grafer

Kantene er ordnede par af knuder.

Eks:



$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{(a, b), (a, d), (b, a), (b, c), (c, d)\}$$

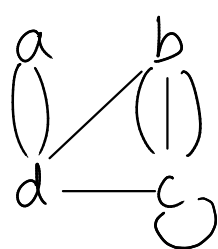
Multigrafer

Parallelle kanter og/eller loops

$$G = (V, E)$$

↑
multimængde

Eks: Ikke-orienteret multigraf



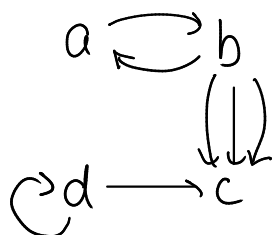
$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{ \{a, a\}, \{a, a\}, \{a, b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, c\}, \{c, d\} \}$$

Bogen skelner mellem

- multigrafer (ingen loops)
- pseudografer (loops og evt. parallelle kanter)

Eks: Orienteret multigraf

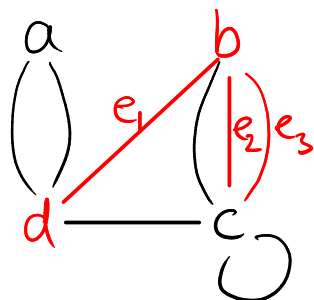


$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{ (a, b), (a, b), (b, c), (b, c), (b, c), (d, c), (d, d) \}$$

Terminologi og grafklasser (Afsnit 10.2)

Ek: Ikke-orienterede grafer



e_1 forbinder b og d / er incident til b og d / har endepunkterne b og d .

b og d er naboer / adjacente.

e_1 og e_2 er adjacente, fordi de har ét fælles endepunkt.

e_2 og e_3 er parallelle, fordi de deler begge endepunkter.

$N(b) = \{c, d\}$ er b 's nabomængde (neighborhood)

$N(\{b, d\}) = N(b) \cup N(d) = \{c, d\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c, d\}$.

Graden af a er $\deg(a) = 2$, da to kanter er incidente til a .

$$\deg(b) = \deg(d) = 4$$

$$\deg(c) = 6 \text{ (begge } e_i\text{'s ender bidrager til } \deg(c)\text{)}$$

$$\boxed{\sum_{x \in V} \deg(x) = \deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d)}$$
$$= 2 + 4 + 6 + 4 = 16 = 2 \cdot |E|$$

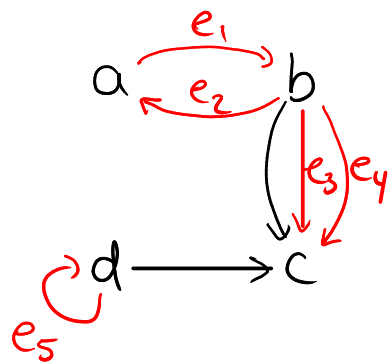
↑
Håndtryks-Sætninger (Sætning 10.2.1)

Håndtryks-Sætninger medfører:

Sætning 10.2.2: Enhver ikke-orienteret graf har et lige #knuder med ulige grad.

Eks: Orienterede grafer

e_1 og e_2 er antiparallelle



e_3 og e_4 er parallelle

e_1 har startknode a og slutknode b
 e_1 er incident fra a og incident til b
d er både start- og slutknode for e_5

Indgrader af a er $\deg^-(a) = 1$ og

udgrader af a er $\deg^+(a) = 1$.

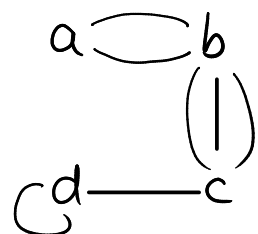
$$\deg^-(b) = 1, \quad \deg^+(b) = 4$$

$$\deg^-(c) = 4, \quad \deg^+(c) = 0$$

$$\deg^-(d) = 1, \quad \deg^+(d) = 2$$

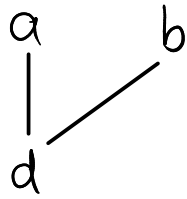
$$\sum_{x \in V} \deg^-(x) = 7 = \sum_{x \in V} \deg^+(x) = |E| \quad (\text{Sætning 10.2.3})$$

Den underliggende ikke-orienterede graf opnås ved at fjerne kantens orientering:

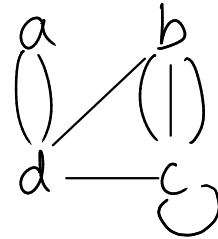


En **delgraf** består af (nogle af) knuderne og (nogle af) kanten mellem dem.

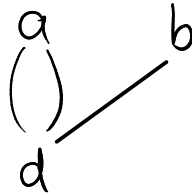
Eks:



er en delgraf af

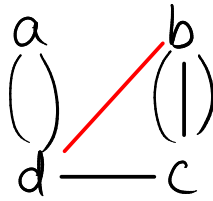


Delgrafer **induceret** af $\{a, b, d\}$ består af knuderne a, b, d og **alle** kanten mellem dem:

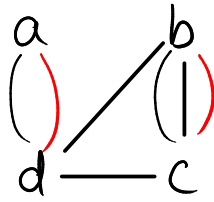


En matching / pardannelse er en mængde af parvis ikke-adjacente kanter:

Maksimal matching:
(kan ikke udvides)



Maksimum matching:
(Størst mulig,
dvs grafer har
ingen matching med flere kanter)



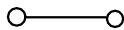
Særlige grafklasser:

Komplette grafer

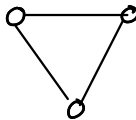
K_1 :



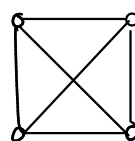
K_2 :



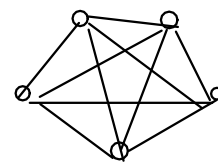
K_3 :



K_4 :



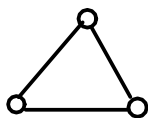
K_5 :



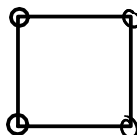
...

Kredse

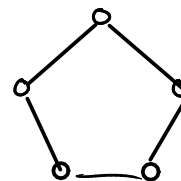
C_3 :



C_4 :



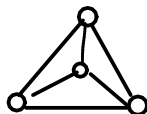
C_5 :



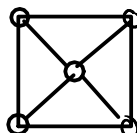
...

Hjul

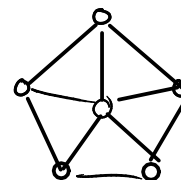
W_3 :



W_4 :



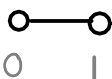
W_5 :



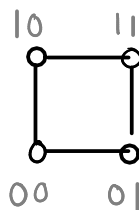
...

Hypercubes

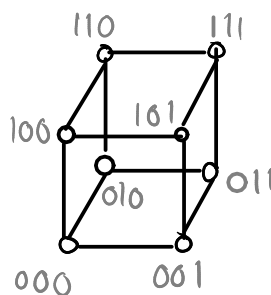
Q_1 :



Q_2 :



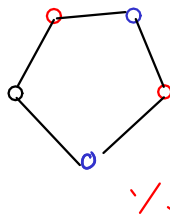
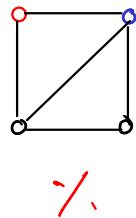
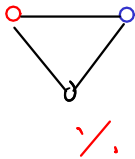
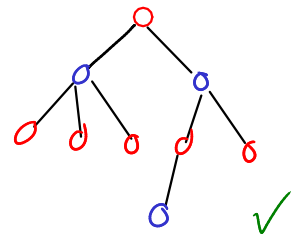
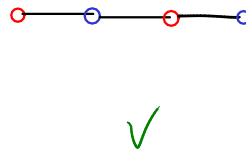
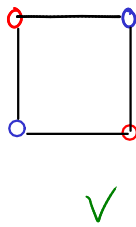
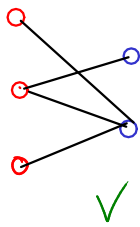
Q_3 :



Todelte grafer

Knudemængden V kan deles i to disjunkte mængder V_1 og V_2 , sådan at alle kanter går mellem V_1 og V_2 . (V_1 og V_2 er **uafhængige** mængder.)

Eks:



En **farvning** af en graf er en tildeling af farver til knuderne i grafer, sådan at naboknuder har forskellige farver.

Setning 10.2.4:

En simpel graf er todelte, hvis og kun hvis den kan tofarves