

Sidste gang

Matricer

Identitetsmatricer

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Transponering

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Symmetrisk

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} = B^T$$

0-1-matricer

$$\vee \wedge \odot$$

Grafer (afsnit 10.1-10.2)

Simple grafer $\leftrightarrow$ multigrafer

Orienterede grafer $\leftrightarrow$ ikke-orienterede grafer

Grad

(Inducert) delgraf

Matching (pardannelse)

Komplette grafer, kredse, hjul, hypercubes

Todelte grafer

1 dag

Grafer

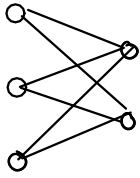
Komplette todelte grafer (afsnit 10.2)

Representation } (afsnit 10.3)

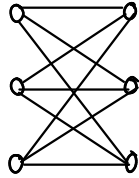
Isomorfi

Sammenhæng (afsnit 10.4)

Komplette todelte grafer



$K_{3,2}$

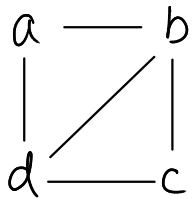


$K_{3,3}$

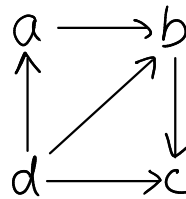
Afsnit 10.3

Representation of grafer:

Adjacenslister

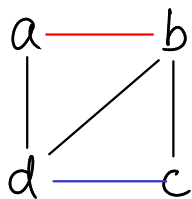


a: b, d
b: a, c, d
c: b, d
d: a, b, c

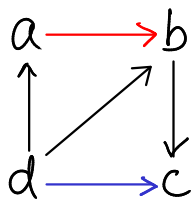


a: b
b: c
c:
d: a, b, c

Adjacensmatricer



$$\begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = A$$

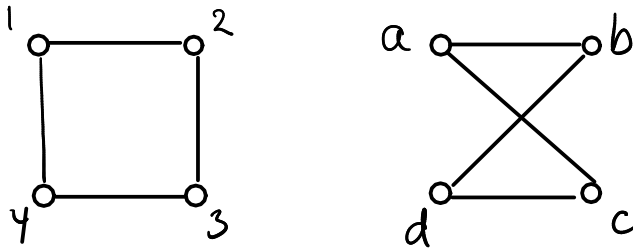


$$\begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = B$$

Vi så sidste gang, at $A \circ A$ og $B \circ B$ giver alle veje af længde 2 i de to grafer

Isomorfi

Eks

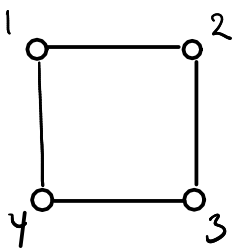


Forstellige grafer?

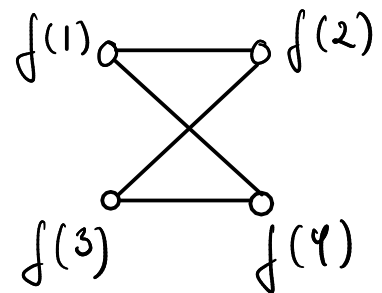
Def. 1

To simple grafer $G_1 = (V_1, E_1)$ og $G_2 = (V_2, E_2)$ er **isomorfe**, hvis $\exists$ bijektion $f: V_1 \rightarrow V_2$, så
 $\{a, b\} \in E_1 \iff \{f(a), f(b)\} \in E_2$,
for alle $a, b \in V_1$.

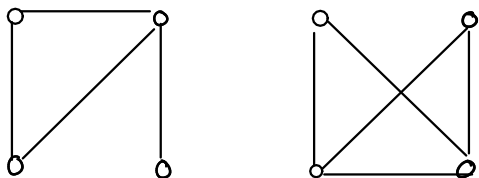
De to grafer i eks. ovenfor er isomorfe:



$$\begin{aligned} f(1) &= a \\ f(2) &= b \\ f(3) &= d \\ f(4) &= c \end{aligned}$$



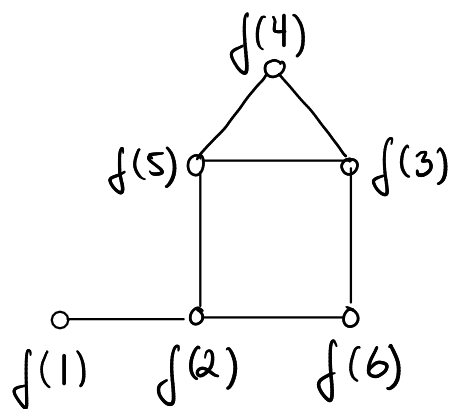
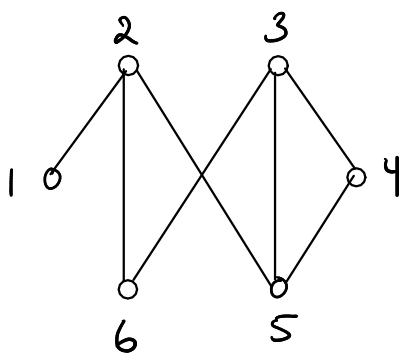
Eks:



Isomorfe?

Nej, der er ikke det samme #kanter.

Eks:

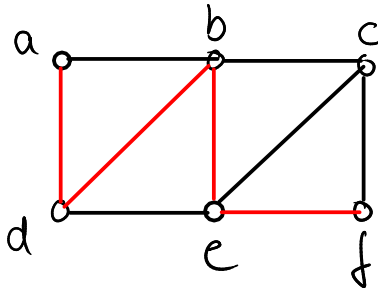


Graf-sammenhæng

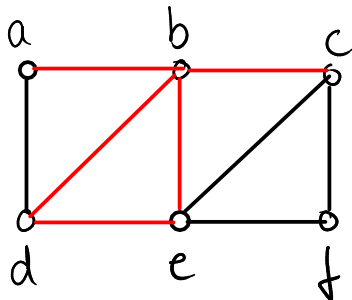
Afsnit 10.4

Stier & kredse

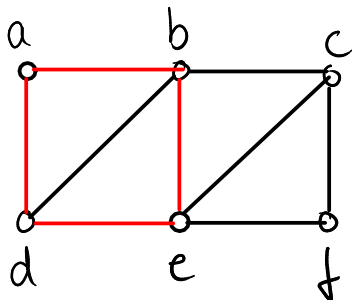
Eks: (Def. 10.4.1)



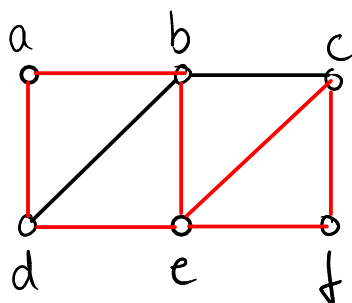
a, d, b, e, f er en
simpel sti af længde 4
(simple path)



a, b, d, e, b, c er en
sti af længde 5.

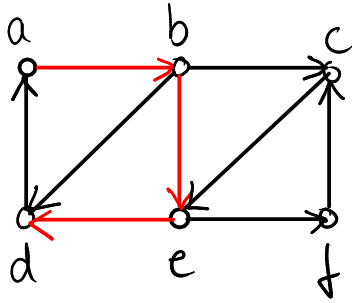


a, b, e, d, a er en
simpel kreds af længde 4
(simple circuit/cycle)

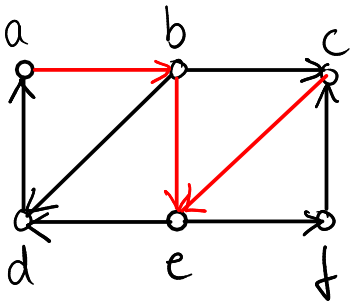


a, b, e, c, f, e, d, a er en
kreds af længde 7.

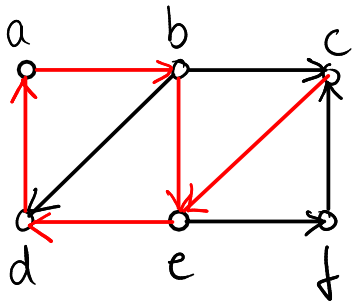
Eks : (Def 10.4.2)



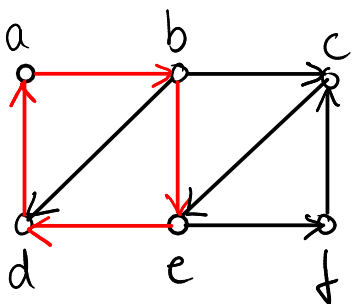
a, b, e, d er en simpel sti



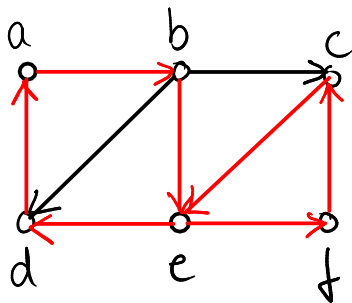
a, b, e, c er ikke en sti.



c, e, d, a, b, e er en sti.



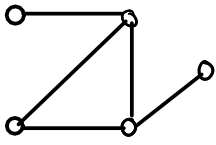
a, b, e, d, a er en simpel kreds



a, b, e, f, c, e, d, a er en kreds

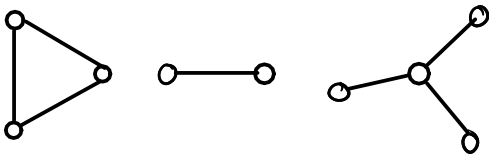
Sammenhæng

Eks:



er **Sammenhængende**, fordi
der er en sti ml. ethvert par af knuder
(Def. 10.4.3)

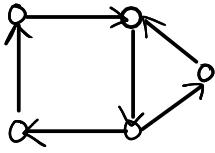
Eks:



har 3 **Sammenhængskomponenter**
↑
maksimal sammenhængende delgraf

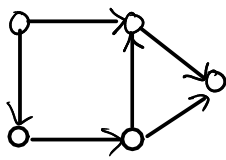
Sammenhængskomponenterne kan identificeres med et enkelt
graf-gennemløb (BFS/DFS)

Eks:



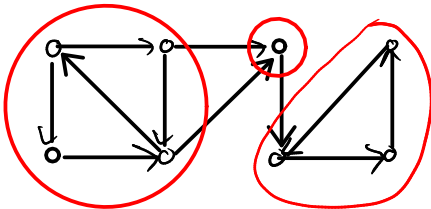
er **stærkt sammenhængende**, fordi:
for ethvert knudepar u, v er der en sti
fra u til v . (Def. 10.4.4)

Eks:



er **svagt sammenhængende**, fordi:
den underliggende ikke-orienterede graf
er sammenhængende.
(Def. 10.4.5)

Eks:



har 3 **stærke sammenhængs-**
komponenter, d.v.s. maksimale
delgrafer, som er stærkt smh.

Bemærk: De stærke sammenhængskomponenter er disjunkte.
Er det tilfældigt?

Stærke smh.komponenter kan findes v.h.a. to gange DFS.
Mere om dette i DM507.

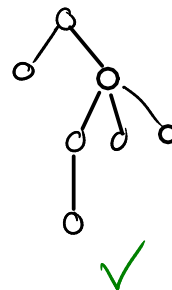
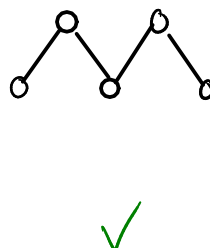
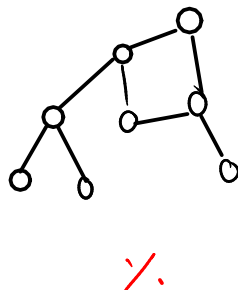
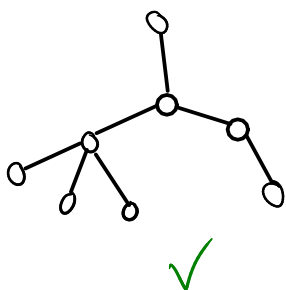
Endnu en grafklasse:

Træer (afsnit 11.1)

Def 11.1.1

Et **træ** er en ikke-orienteret, sammenhængende, acyklisk graf

Eks:



En graf bestående af træer kaldes en **skov**.

D.v.s. en skov er en ikke-orienteret, acyklisk graf, som ikke nødvendigvis er smh.

ætsning 11.1.1

$G = (V, E)$: ikke-orienteret graf

$\Updownarrow$ G er et **træ**

$\forall u, v \in V: \exists!$ sti ml. u og v

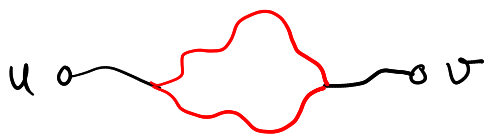
Bevis:

⇓:

≥ 1 sti: $\text{Træ} \xRightarrow{\text{Def. 11.1.1}} \text{smh.} \xRightarrow{\text{Def. 10.4.3}} \text{sti ml. hvert knudepar}$

≤ 1 sti: $\text{Træ} \xRightarrow{\text{Def. 11.1.1}} \text{acyklisk} \xRightarrow{(*)} \leq 1 \text{ sti ml. hvert knudepar}$

(*): Kontraposition: To stier $\Rightarrow$ **kreds**



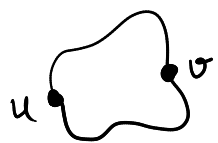
De to veje splitter op (ved u eller senere) og samles igen (ved v eller tidligere).

⇑:

≥ 1 sti ml. hvert knudepar $\Rightarrow$ **smh.**

≤ 1 sti ml. hvert knudepar $\Rightarrow$ **acyklisk:**

Kontraposition:



$\exists \text{ kreds} \Rightarrow$

$\exists \text{ knudepar med to stier imellem sig}$

D.v.s.

Præcis er sti ml. hvert knudepar

$\Rightarrow$ smh. og acyklisk

$\xRightarrow{\text{Def. 11.1.1}} \text{træ}$

□

Sætning 11.1.2

Et træ med n knuder har $n-1$ kanter

Bevis: Induktion over n

Basis: $n=1$

Et træ med 1 knude har 0 kanter

Ind. ant.: $n=k \geq 1$

Et træ med k knuder har $k-1$ kanter

Ind. skridt: $n=k+1$

T : vilkårligt træ med $k+1$ knuder

Vælg vilkårlig knude i T som rod.

Vælg vilkårligt blad v

Lad u være v 's forælder

T' : opnås ved at slette v og $\{u, v\}$ fra T .

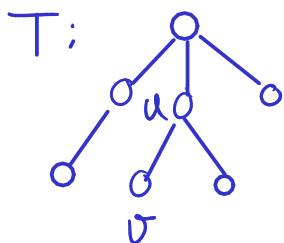
T' har k knuder.

D.v.s. T' har $k-1$ kanter, ifølge ind. ant.

D.v.s. T har k kanter.

□

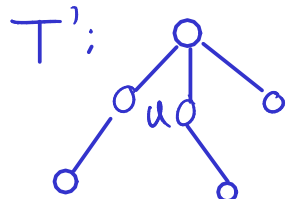
Illustration:



n knuder $\Rightarrow$ $n-1$ knuder

(ind. ant.) $\Downarrow$

$n-1$ kanter $\Leftarrow$ $n-2$ kanter



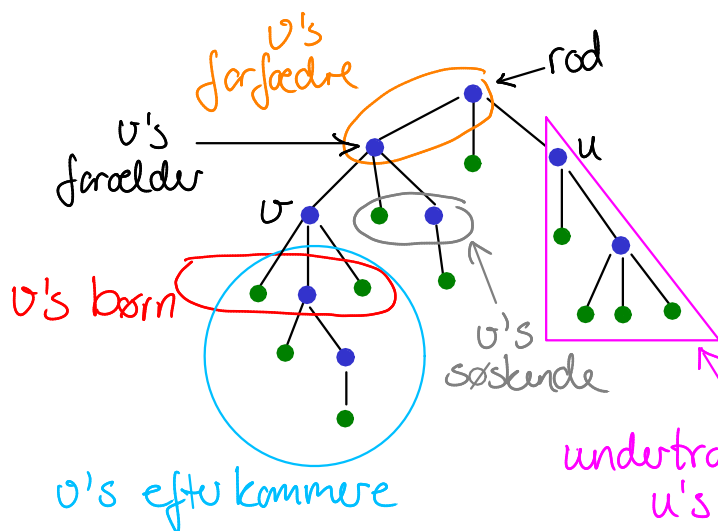
Træer kan defineres på mange forskellige måder:
(kommer I til at bruge i DM507)

For en ikke-orienteret graf G med n knuder gælder:

- $\Updownarrow$ G er et træ
- $\Updownarrow$ G er smh. & acyklisk (Def. 1)
- $\Updownarrow$ $\exists!$ sti ml. hvert knudepar (Sætning 1)
- $\Updownarrow$ G er smh., men
- $\Updownarrow$ $\forall e \in E: G - e$ er ikke smh. (Opgave 14)
- $\Updownarrow$ G er acyklisk, men
- $\Updownarrow$ $\forall u, v \in V: G + \{u, v\}$ er ikke acyklisk
- $\Updownarrow$ G er smh. og har $n-1$ kanter (Opgave 15a)
- $\Updownarrow$ G er acyklisk og har $n-1$ kanter (Opgave 15b)

Træer med rod

(rooted trees)



indre knuder

blade (alle knuder, som ikke har nogen børn)

undertræet med rod i u /
 u 's undertræ