

Sidste gang Grafer

Adjacenslister, adjacensmatricer

Isomorfi

} Afsnit 10.3

(Simpel) sti/vej

(Simpel) kreds

Sammenhængende

Sammenhængskomponenter

Stærkt/svagt sammenhængende

Stærke sammenhængskomponenter

} Afsnit 10.4

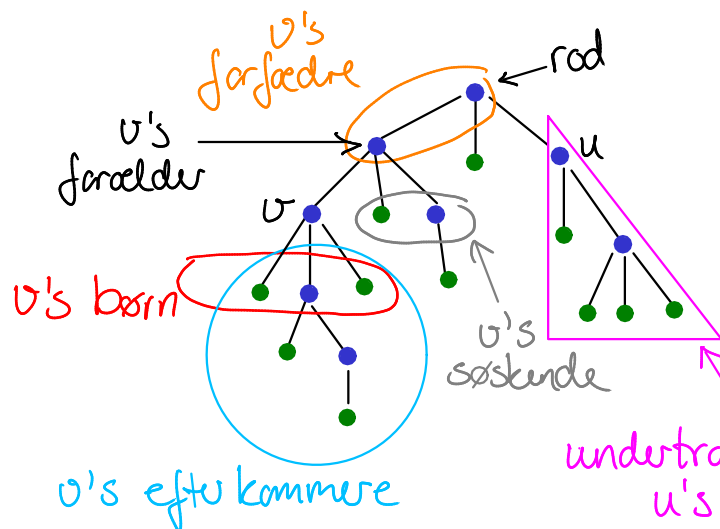
Ikke orienterede grafer:

Træ $\Leftrightarrow$ smh. & acyklisk

$\Leftrightarrow \exists!$ sti ml. hvert knudepar

} Afsnit 11.1

Træer med rod (rooted trees):



indre knuder

blade (alle knuder, som ikke har nogen børn)

undertræet med rod i u / u's undertræ

1 dag

Følger

Eks: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Rækker

Eks: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

} Afsnit 2.4

Konvergens

Eks:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

} Adams/Essex
Afsnit 9.1

Følger og rækker (afsnit 2.4)

Følge (sequence)

Ordnet liste

Eller

Funktion fra (en delmængde af) $\mathbb{N}$

Vi vil koncentrere os om uendelige følger:

Eks: Fibonacci-tallene

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \quad n \geq 2$$

Eks: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+ : f(n) = \frac{1}{n}$$

Eller

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

↑ konflikt med mængdenotation

Eks: $\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

$$a_n = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Eller

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

Eks på:

Geometrisk følge

$$a, ar, ar^2, \dots$$

Eller

$$a_n = ar^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

↖ ↗
begyndelsesled fælles faktor

Eks fra før: $a=1, r=\frac{1}{2}$

Aritmetisk følge

$$a, a+d, a+2d, \dots$$

Eller

$$a_n = a + nd, \quad n \in \mathbb{N}$$

↖ ↗
begyndelsesled fælles forskel

Eks: $1, 3, 5, 7, \dots$

$$a=1, d=2$$

Eks: Mandelbrot-fraktalen

For hvert $c \in \mathbb{C}$ defineres en følge:

$$x_0 = 0$$

$$x_n = x_{n-1}^2 + c$$

Det komplekse tal c tilhører Mandelbrot-mængden, hvis den tilhørende Mandelbrot-følge $\{x_n\}$ er begrænset.

F.eks. tilhører i Mandelbrot-mængden:

$$x_1 = 0^2 + i = i$$

$$x_2 = i^2 + i = i - 1$$

$$x_3 = (i-1)^2 + i = -1 + 1 - 2i + i = -i$$

$$x_4 = (-i)^2 + i = i - 1 = x_2$$

D.v.s.

$$x_5 = x_3$$

$$x_6 = x_4 = x_2$$

$$x_7 = x_5 = x_3$$

$\vdots$

Escape condition: $|x_n| > 2$

Jo hurtigere escape, jo lysere farve.

Man kan også lægge tallene i en følge sammen...

Række (series)

Sum af et (uendeligt) antal led

Geometrisk række

Summen af leddene i en geometrisk følge:

$$\sum_{i=0}^n ar^i \text{ eller } \sum_{i=0}^{\infty} ar^i$$

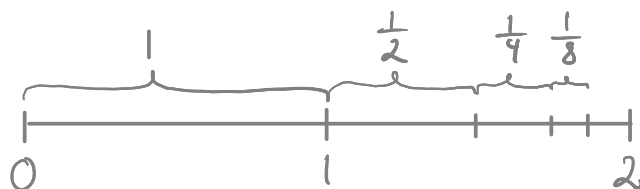
Eks: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$(a=1, r=\frac{1}{2})$

$n=2: 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$

$n=3: 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}$

$n=4: 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}$



$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$$

Eks: $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Illustration:

	Binoert (2-tals-systemet)
2^0	1
2^1	10
2^2	100
2^3	1000
$2^4 - 1$	1111 = 10000 - 1

Eks: $1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots$

$$\sum_{i=0}^n 3^i = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Illustration:

Ternaert (3-tals-systemet):

$2 \cdot 3^0$	2
$2 \cdot 3^1$	20
$2 \cdot 3^2$	200
$2 \cdot 3^3$	2000
$3^4 - 1$	2222 = 10000 - 1

D.v.s.

$$2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) = 3^4 - 1$$

$$\Downarrow$$

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = \frac{3^4 - 1}{2}$$

Tilsvarende fås:

$$\sum_{i=0}^n 4^i = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

da

$$\begin{aligned} 3 \cdot (4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3) &= 4^4 - 1 \\ \Updownarrow \\ 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 &= \frac{4^4 - 1}{3} \end{aligned}$$

O.s.v. ...

Generell:

$$\begin{aligned}(r-1) \sum_{i=0}^n r^i &= r \sum_{i=0}^n r^i - \sum_{i=0}^n r^i \\&= \sum_{i=0}^n r^{i+1} - \sum_{i=0}^n r^i \\&= \sum_{i=1}^{n+1} r^i - \sum_{i=0}^n r^i \\&= r^{n+1} + \sum_{i=1}^n r^i - \left(r^0 + \sum_{i=1}^n r^i \right) \\&= r^{n+1} - r^0 \\&= r^{n+1} - 1\end{aligned}$$

$r \neq 1 \Downarrow$

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

D.v.s.

$$\sum_{i=0}^n r^i = \begin{cases} \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, & \text{for } r \in \mathbb{R} - \{1\} \\ (n+1)r, & \text{for } r = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n r^i = \begin{cases} \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} - \frac{r - 1}{r - 1} = \frac{r^{n+1} - r}{r - 1}, & \text{for } r \in \mathbb{R} - \{1\} \\ nr, & \text{for } r = 1 \end{cases}$$

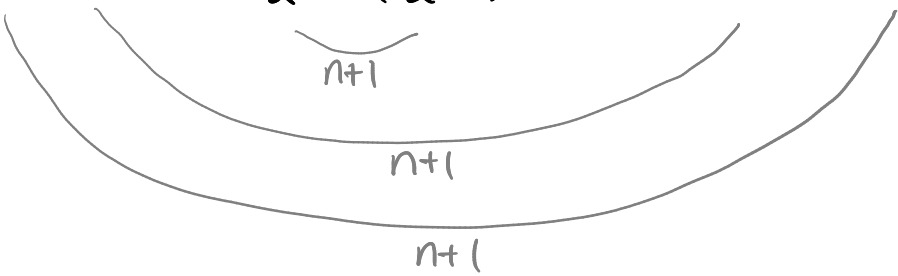
Aritmetiske række

Summen af leddene i en aritmetisk følge:

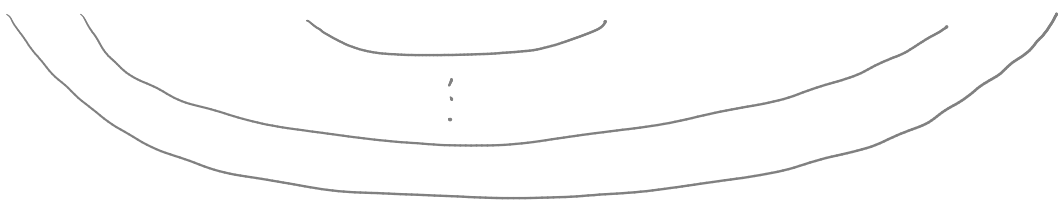
$$\sum_{i=0}^n (a + id)$$

$$\text{Eks: } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

n lige:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \dots + (n-1) + n = (n+1) \frac{n}{2}$$


n ulige:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+3}{2} + \dots + (n-1) + n$$


$$= \frac{n-1}{2} (n+1) + \frac{n+1}{2}$$

$$= (n-1) \cdot \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

Generell:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (a+id) &= \sum_{i=0}^n a + d \sum_{i=0}^n i \\ &= (n+1)a + d \frac{n(n+1)}{2} \quad (*)\end{aligned}$$

Bes: $1 + 3 + 5 + \dots + 2k-1$

$$\sum_{i=0}^{k-1} 1+2i \underset{\substack{\uparrow \\ *}}{=} k + 2 \cdot \frac{(k-1)k}{2} = k + k^2 - k = k^2$$

Summer dukker f.eks. op, når vi skal beregne #gennemløb af en løkke for at anslå kørtiden af en algoritme:

Eks:

```
For i:=1 to 20
  For j:=1 to 10
  ...
```

$$\# \text{gennemløb} = 20 \cdot 10 \left(= \sum_{i=1}^{20} 10 \right) = 200$$

Eks:

```
For i:=1 to 20
  For j:=1 to i
  ...
```

$$\# \text{gennemløb} = \sum_{i=1}^{20} i = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$$

Eks:

```
For i:=11 to 20
  For j:=1 to i
  ...
```

$$\# \text{gennemløb} = \sum_{i=11}^{20} i = \sum_{i=1}^{20} i - \sum_{i=1}^{10} i = 210 - \frac{10 \cdot 11}{2} = 155$$

Eller

$$\# \text{gennemløb} = \sum_{i=11}^{20} i = \sum_{i=0}^9 (11 + i) = 10 \cdot 11 + \frac{9 \cdot 10}{2} = 155$$

↑
*

Eks:

For $i:=1$ to 20

For $j:=1$ to i

For $k:=1$ to j

...

$$\begin{aligned}\text{\# gennemløb} &= \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^i j \\ &= \sum_{i=1}^{20} \frac{i(i+1)}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{20} i^2 + \sum_{i=1}^{20} i \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \frac{20 \cdot 21}{2} \right), \text{ ifølge Tabel 2.4.2 (S. 176)}$$

$$= 1540$$

Notation:

$$\sum_{i=1}^n i = \sum_{1 \leq i \leq n} i$$

$$= \sum_{i \in A} i, \text{ hvor } A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Terminologi:

Def 1

(a) Hvis $a_n \geq L$, for $n \in \mathbb{N}^+$, siges:

- $\{a_n\}$ er **begrænset nedfra** af L
- L er en **nedre grænse** for $\{a_n\}$

Hvis $a_n \leq M$, for $n \in \mathbb{N}^+$, siges:

- $\{a_n\}$ er **begrænset overfra** af M
- M er en **øvre grænse** for $\{a_n\}$

Hvis $\{a_n\}$ er begrænset både nedfra og overfra, siges:
 $\{a_n\}$ er **begrænset**

D.v.s. $\forall n \in \mathbb{N}^+ : |a_n| \leq K$, hvor $K = \max\{|L|, |M|\}$

(b) Hvis $\forall n \in \mathbb{N}^+ : a_n \geq 0$, siges: $\{a_n\}$ er **positiv**

Hvis $\forall n \in \mathbb{N}^+ : a_n \leq 0$, siges: $\{a_n\}$ er **negativ**

(c) Hvis $\forall n \in \mathbb{N}^+ : a_{n+1} \geq a_n$, siges: $\{a_n\}$ er **voksende**

Hvis $\forall n \in \mathbb{N}^+ : a_{n+1} \leq a_n$, siges: $\{a_n\}$ er **aftagende**

Hvis $\{a_n\}$ er voksende eller aftagende, siges:
 $\{a_n\}$ er **monoton**

(d) Hvis $\forall n \in \mathbb{N}^+ : a_n a_{n+1} < 0$, siges: $\{a_n\}$ er **alternende**

Eks: $\{(\frac{1}{2})^n\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Def. 1(a): Begrænset nedefra af 0
 Begrænset ovenfra af $\frac{1}{2}$
 D.v.s. **begrænset**

Def. 1(b): **Positiv**

Def. 1(c): **Aftagende**
 D.v.s. **monoton**

Eks: $\{(-\frac{1}{2})^n\} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Def. 1(d): **Alternierende** (skiftvis positiv og negativ)

Eks: $\{n-100\} = -99, -98, -97, \dots$

Ultimativt positiv (fra $n=100$)

Eks: $\{\frac{n^2}{2^n}\} = \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \dots$
 $\qquad\qquad\qquad \qquad\qquad\qquad \approx 0.78 \quad \approx 0.56 \quad \approx 0.38$

Ultimativt aftagende (fra $n=3$)

En følge kan også være ultimativt alternierende, men:
 ultimativt begrænset $\Rightarrow$ begrænset (hvorfor?)