

Sidste gang

Følger

Rækker

Geometriske rækker

$$\sum_{i=0}^n r^i = \begin{cases} \frac{r^{n+1}-1}{r-1}, & r \neq 1 \\ n+1, & r = 1 \end{cases}$$

Aritmetiske rækker

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dobbelt-summer

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j &= \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right), \quad \text{ifølge Tabel 2 (s. 176)} \end{aligned}$$

$$\text{Eks: } \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

Begrænset nedefra af 0

Begrænset ovenfra af $\frac{1}{2}$

D.v.s. *begrænset*

Positiv

Aftagende

D.v.s. *monoton*

$$\text{Eks: } \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Alternierende (skiftvis positiv og negativ)

$$\text{Eks: } \{ n - 100 \} = -99, -98, -97, \dots$$

Ultimativt positiv (fra $n=100$)

$$\text{Eks: } \left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\} = \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \dots$$

$\approx 0,78 \quad \approx 0,56 \quad \approx 0,38$

Ultimativt aftagende (fra $n=3$)

1 dag

Følger

Konvergens / divergens

Regneregler for grænseværdier

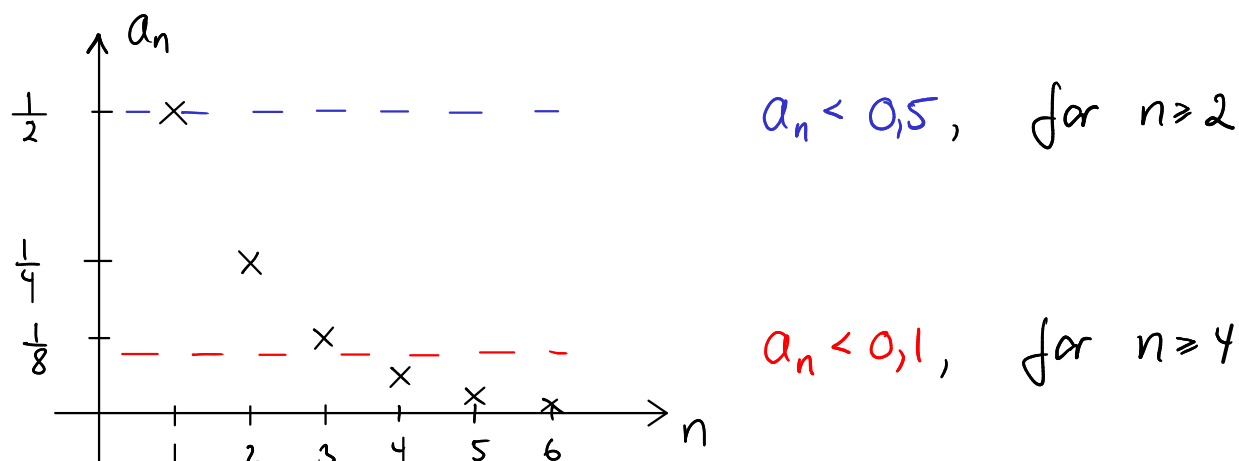
Eks: $\{a_n\} = \{(\frac{1}{2})^n\}$

$\{a_n\}$ er **ultimativt** begrænset overfra af 0,01 (fra $n=7$)

Faktisk er $\{a_n\}$ **ultimativt** begrænset overfra af ethvert $\varepsilon > 0$.

Desuden er $\{a_n\}$ begrænset nedefra af 0.

Det betyder, at $\{a_n\}$ konvergerer mod 0:



Generelt: $a_n < \varepsilon$, for $n > \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil$, fordi

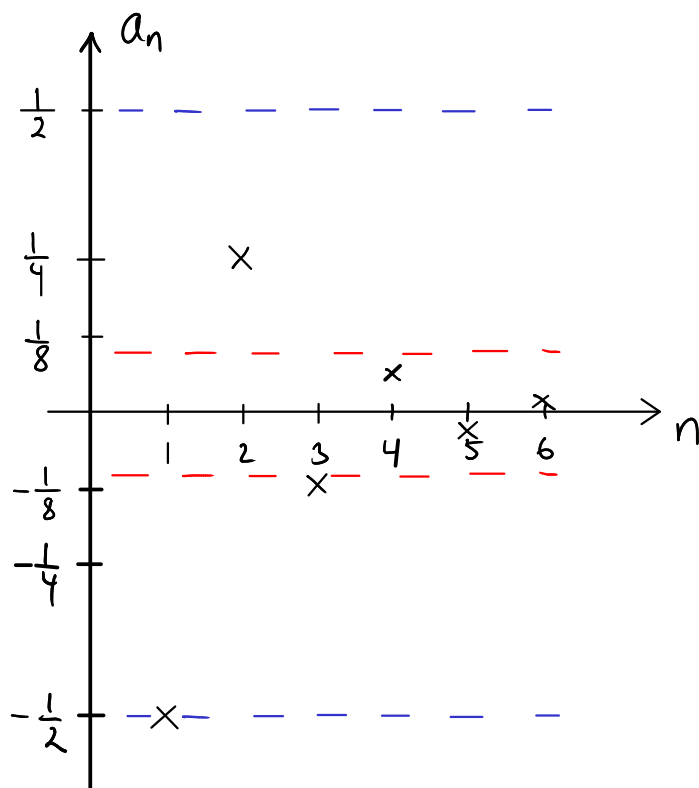
$$(\frac{1}{2})^n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \Leftrightarrow \log_2(\frac{1}{\varepsilon}) < n$$

D.v.s.: Ligegyldigt hvor lille ε er, findes der et N , der er så stort, at $a_n < \varepsilon$ for alle $n \geq N$ (f.eks $N = \log_2(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$).

D.v.s. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : a_n < \varepsilon$

Eks: $\{b_n\} = \{(-\frac{1}{2})^n\} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

$\{b_n\}$ konvergerer mod 0:



$|b_n| < 0,5$ for $n \geq 2$

$|b_n| < 0,1$ for $n \geq 4$

Generelt: $|b_n| < \varepsilon$, for $n > \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

D.v.s.: Lige gyldigt hvor lille ε er, findes der et N , der er så stort, at afstanden m.h. b_n og 0 er mindre end ε , for alle $n \geq N$.

D.v.s. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \forall n \geq N : |b_n| < \varepsilon$

Def 2

Lad $\{a_n\}$ være en uendelig følge, og lad $L \in \mathbb{R}$.
Hvis

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$$

da

konvergerer $\{a_n\}$ mod grænseværdien L

↑ 0 : eks overfor

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ skrives også som

$$a_n \rightarrow L \text{ for } n \rightarrow \infty$$

↑
„går imod“

↑
„går mod“

En følge, som ikke konvergerer, **divergerer**.

Eks 5:

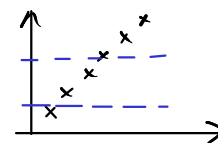
$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \quad \text{konverger mod } 1$$

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

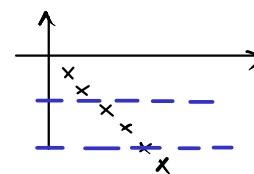
$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

D.v.s. vi kan f.eks. vælge $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ i Def. 2

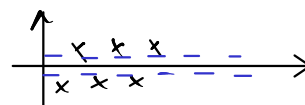
$$\{n\} = 1, 2, 3, \dots \quad \text{diverger mod } \infty$$



$$\{-n\} = -1, -2, -3, \dots \quad \text{diverger mod } -\infty$$



$$\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \dots \quad \text{diverger}$$



Regneregler for grænseværdier (s. 499 ø.):

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konverger, gælder:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\begin{aligned} \text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \quad \text{hvis } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2 \cdot 1 = 2$$

Eks 6a:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} \\&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} \\&= \frac{2 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \\&= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Tommelfingerregel:

Kig på de mest betydende led (dem, der vokser hurtigst). I dette tilfælde: $2n^2$ og $5n^2$.

Sætning 3

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0, \text{ hvis } |x| < 1$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \text{ for alle } x \in \mathbb{R}$$

Bevis:

$$(a): \quad x = 0: \quad x^n = 0 \text{ for alle } n \in \mathbb{Z}^+ \\ x \neq 0:$$

$$\text{Def. 2} \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \\ \forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{Z}^+: \forall n \geq N: |x^n| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} & \uparrow |x^n| < \varepsilon \\ & \uparrow |x|^n < \varepsilon \\ x \neq 0 & \uparrow n \ln |x| < \ln \varepsilon \\ & \uparrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}, \text{ da } \ln |x| \neq 0, \text{ fordi } |x| < 1 \\ & \quad \uparrow \text{"Vender" ulighedstegnet, fordi vi dividerer med noget negativt.} \end{aligned}$$

D.v.s.

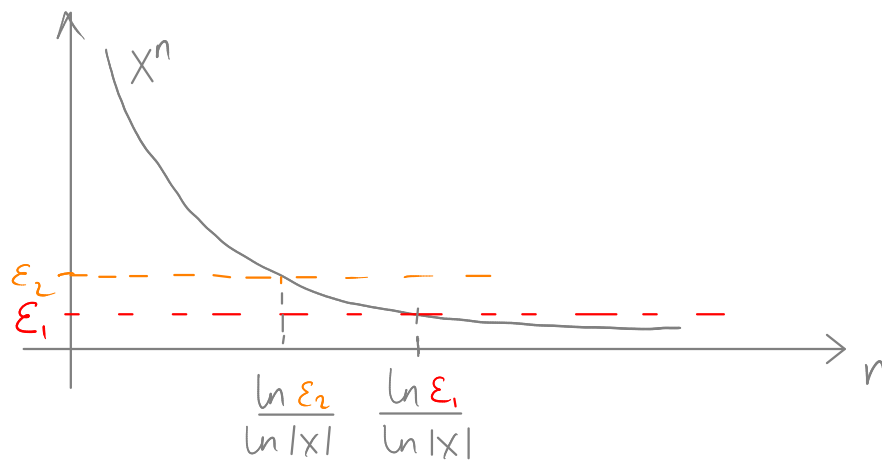
$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} \Rightarrow |x^n| < \varepsilon$$

D.v.s.

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{Z}^+: \forall n \geq N: |x^n| < \varepsilon$$

$$\uparrow \text{f.eks. } N = \left\lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} \right\rfloor + 1$$

Illustration :



(b) :

Eks : $X=2$

$n=5$:

$$\frac{X^n}{n!} = \frac{2^5}{5!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2}}_2 \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\frac{X}{n}}$$

$n=10$:

$$\frac{X^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{10} = \underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2}}_2 \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdots \frac{2}{9}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{2}{10}}_{\frac{X}{n}}$$

Generelt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &= \frac{\cancel{|x|} \cdot \cancel{|x|} \cdot \dots \cdot \cancel{|x|}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \\ &= \underbrace{\frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{\lceil |x| \rceil}}_{\substack{\text{afhænger kun af } x, \\ \text{ikke af } n}} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{\lceil |x| \rceil + 1} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n-1} \cdot \frac{|x|}{n}}_{< \frac{|x|}{n}} \end{aligned}$$

$$< C \cdot \frac{|x|}{n}, \quad \text{hvor} \quad C = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{\lceil |x| \rceil} = \frac{|x|^{\lceil |x| \rceil}}{\lceil |x| \rceil!}$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \frac{|x|}{n}, \quad \text{hvor} \quad C = \frac{|x|^{\lceil |x| \rceil}}{\lceil |x| \rceil!} \\ &= C \cdot |x| \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}_{=0}, \quad \text{ifølge regnereglerne for grænseværdier} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Desuden klart, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \geq 0$$

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

□

Eks 10 :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} + \frac{5^n}{5^n} \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 \\&= 0 + 0 + 1, \text{ ifølge Sætning 3(a)} \\&= 1\end{aligned}$$