

Sidste gang

Følger

Konvergens / divergens

$\{a_n\}$ konvergerer mod L

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

$\Downarrow$

$a_n \rightarrow L$ for $n \rightarrow \infty$

Regneregler for grænseværdier

$x^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, hvis $|x| < 1$
 $\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$ } Sætning 3

1 dag

Rækker

Konvergens / divergens

Grænseværdier

Næste gang

Konvergenzkriterier for rækker

Sidste gang

„Spørgetime“

Uendelige rækker

(afsnit 9.2)

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = ?$

Def 3

Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ kaldes rækkens n 'te partielle sum

Hvis $\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$,

siges rækken at konvergere mod s .

Dette skrives også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Eks: $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$\vdots$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

D.v.s.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Geometriske rækker

$$\sum_{i=0}^n r^i \left(= \sum_{i=1}^n r^{i-1} \right) = \begin{cases} \frac{r^{n+1}-1}{r-1}, & \text{for } r \neq 1 \\ n+1, & \text{for } r=1 \end{cases}$$

D.v.s.

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i \begin{cases} \text{div konvergerer, for } r \leq -1 \\ = \frac{0-1}{r-1} = \frac{1}{1-r}, & \text{for } |r| < 1 \\ = \infty, & \text{for } r \geq 1 \end{cases}$$

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \text{ divergerer:}$$

$s_0 = 1, s_1 = -3, s_2 = 6, s_3 = -21, \dots$
(og udsvingene bliver større og større.)

Coupon Collector's Problem

- Cornflakes-pakker med klistermærke i hver
- n forskellige klistermærker

Hvor mange pakker kan man forvente at skulle købe, før man har alle n forskellige klistermærker?

Forventet #pakker inden man har 1 klistermærke:	1
Forventet ekstra #pakker før man har 1 mere:	$\frac{n}{n-1}$
_____ " _____	$\frac{n}{n-2}$
_____ " _____	$\vdots$
_____ " _____	n

$$\begin{aligned} \text{I alt: } & \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} \\ &= n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{1} \right) \\ &= n H_n \\ &\approx n \ln n \end{aligned}$$

Eks:

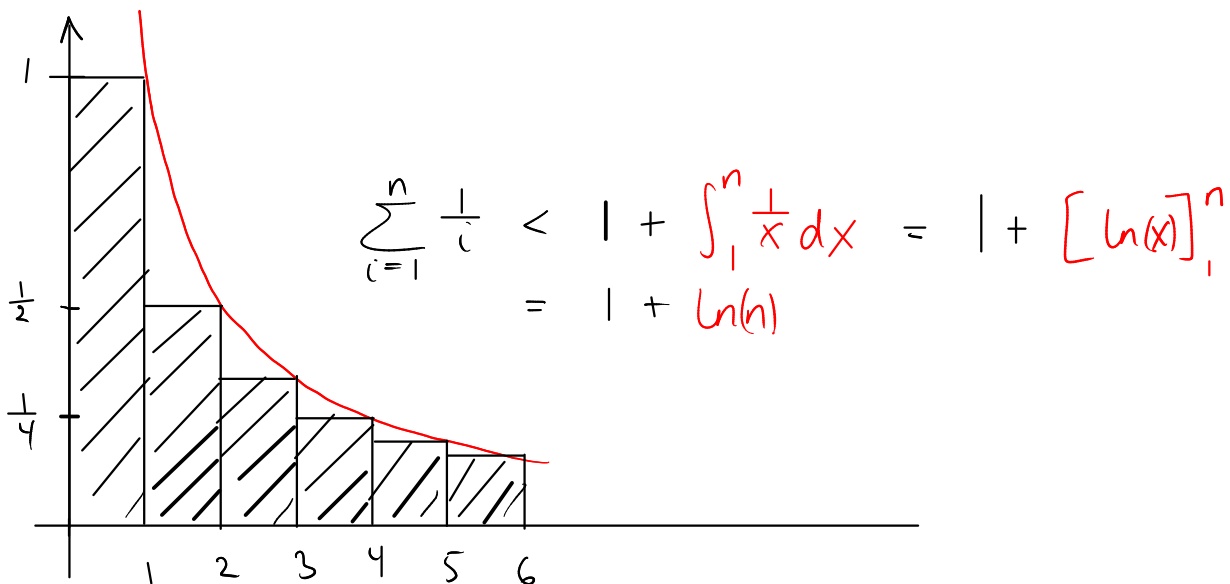
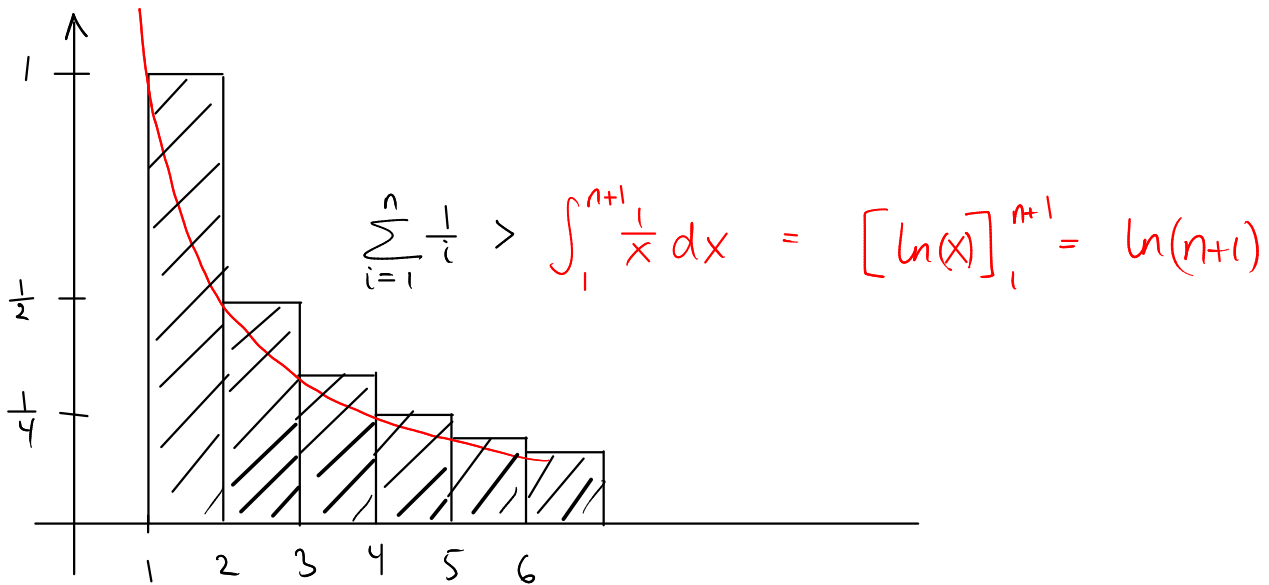
$$10 \cdot \ln(10) \approx 23$$

$$100 \cdot \ln(100) \approx 461$$

Eks 4:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \text{Harmoniske række}$$

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad n\text{'te harmoniske tal}$$



D.v.s. $\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$

D.v.s. H_n divergerer mod ∞ .

Sætning 4



$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

D.v.s. (ved kontraposition)

$\{a_n\}$ konvergerer ikke mod 0



$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer}$$

Beweis:

Hvis s_n skal konvergere, må $s_n - s_{n-1} = a_n$ gå mod 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$



$$\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$



$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \\ &= a_n \end{aligned}$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} \\ &= s - s \\ &= 0 \end{aligned}$$



Husk, at det modsatte ikke gælder:

Eks: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

D.v.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ er en nødvendig, men ikke tilstrækkelig betingelse for, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverger.

Eks 5(a):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \text{ diverger, da } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} > 0$$

Konvergens afhænger kun af rækkens hale (tail):

Sætning 5

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \\ \Updownarrow & \\ & \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \end{aligned}$$

Bevis: Opgave 23.

D.v.s. det er OK blot at anvende konvergens-kriterierne i afsnit 9.3 på rækkens hale.

Sætning 6

Lad $\{a_n\}$ være en ultimativt positiv følge,
og lad $\{s_n\}$ være dens partielle summer.

Hvis $\{s_n\}$ er begrænset ovenfra, konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Ellers er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Beweis: Opgave 24.

Bemærk, at Def. 3 betyder at grænseværdier for en uendelig række beregnes præcis som grænseværdier for en uendelig følge.

Dermed kan vi bruge mange af de regneregler, som vi mødte i afsnit 9.1. Dette er udtrykt i Sætning 7.

Sætning 7

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, da gælder

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(c) $a_n \leq b_n$, for alle $n \geq 1$
 $\downarrow$
 $A \leq B$

Bemærk: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n} \quad \text{i mange tilfælde.}$$

(herfor?)

Illustration:

$$\sum_{n=1}^2 a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^2 a_n \cdot \sum_{n=1}^2 b_n &= (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

Eks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \neq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{1} = 1$$