

Sidste gang Rækker & konvergens (afsnit 9.2)

$s_n = \sum_{i=1}^n a_n$ kaldes $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$'s n 'te partielle sum

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (\text{hvis den findes})$$

Eks:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

$$\{s_n\} = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^n = \infty$$

$$\{s_n\} = 2, 6, 14, 30, \dots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \text{ divergerer } \{s_n\} = -1, 0, -1, 0, \dots$$

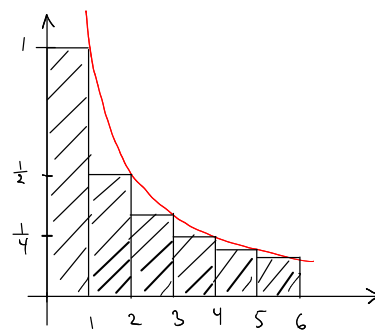
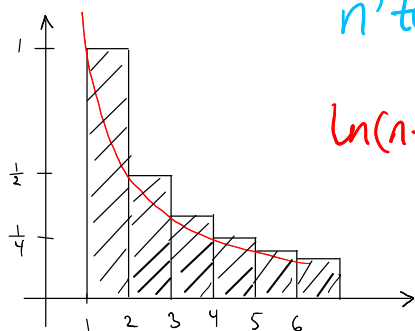
Geometriske rækker

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \begin{cases} \text{divergerer, hvis } r \leq -1 \\ = \frac{1}{1-r}, \text{ hvis } -1 < r < 1 \\ = \infty, \text{ hvis } r \geq 1 \end{cases}$$

Eks 4:

n 'te Harmoniske tal

$$\ln(n+1) < \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}_{H_n} < \ln(n) + 1$$



Konvergens

$$\neg(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer} \quad (\text{Sætning 4})$$

Rækkeens **hale** afgør konvergens/divergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \quad (\text{Sætning 5})$$

Hvis $\{a_n\}$ ultimativt positiv, gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \Leftrightarrow s_n \text{ er begrænset ovenfra} \quad (\text{Sætning 6})$$

Regneregler (Sætning 7)

Ekst:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \neq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$$

1 dag (afsnit 9.3)

Konvergens-kriterier for positive rækker

Integral-Kriteriet

Sammenlignings-Kriteriet

Grænse-sammenlignings-Kriteriet

Kvotient-Kriteriet

p-rækker: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Konvergens-kriterier for positive rækker (afsnit 9.3)

Sætning 8 (Integral-Kriteriet)

Hvis $a_n = f(n)$, hvor

f er positiv, kontinuert og aftagende på $[N, \infty)$, $N \in \mathbb{Z}^+$,

da gælder enten

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\int_N^{\infty} f(x) dx$ konvergerer begge

eller

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_N^{\infty} f(x) dx = \infty$$

Beweis:

Da f og $\{a_n\}$ er positive, har integral og række hver især kun to muligheder:

at konvergere eller at divergere mod ∞ .

D.v.s. sætningen siger blot, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konv.}$$

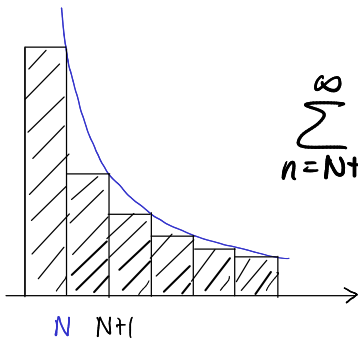
Ifølge Sætning 5 behøver vi kun se på rækkens hale:

For ethvert $N \in \mathbb{Z}^+$ gælder

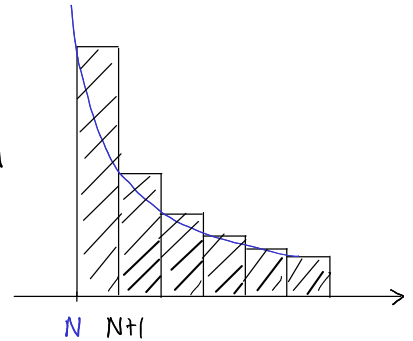
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

Vi bruger under- og over-summer som i
Eks 9.2.4 om H_n :

Da f er aftagende, gælder:



$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \int_N^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$



D.v.s.

$$\exists s \in \mathbb{R} : \int_N^{\infty} f(x) dx = s \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq s$$

$\Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ konvergerer, ifølge Sætning 6

og omvendt:

$$\int_N^{\infty} f(x) dx = \infty \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n = \infty, \text{ ifølge Sætning 6}$$

□

Sætning 9 (Sammenlignings-Kriteriet)

(Comparison Test)

Hvis $0 \leq a_n \leq K b_n$ ultimativt, $K \in \mathbb{R}^+$,
da gælder:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

Bevis:

(a):

$$\begin{aligned} & \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq K b_n \\ \Updownarrow & \\ & \exists N \in \mathbb{Z} : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} K b_n, \text{ ifølge Sætning 7(c)} \end{aligned}$$

$$\Updownarrow \quad \exists N \in \mathbb{Z} : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq K \sum_{n=N}^{\infty} b_n, \text{ ifølge Sætning 7(a)}$$

$$\Downarrow \quad \sum_{n=N}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.}, \text{ ifølge Sætning 6}$$

da a_n er ultimativt positiv

$$\Updownarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}, \text{ ifølge Sætning 5}$$

(b): Da $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er ultimativt positive, er
(b) blot det kontrapositive af (a).

□

Generalisering af H_n :

p -rækker (Eks. 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{div. mod } \infty, & \text{hvis } p \leq 1 \\ \text{konv.}, & \text{hvis } p > 1 \end{cases}$$

Bevis:

$p \leq 1$: $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$.

Dermed divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ mod ∞ , ifølge Sætning 9(b) og Eks 9.2.4.

$p > 1$: Bruger Integral-kriteriet (Sætning 8):

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} x^{-p} dx &= \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{\infty} \\ &= 0 - \frac{1}{1-p}, \text{ da } 1-p < 0 \\ &= \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

□

p -rækker kan være nyttige i kombination med Sætning 9 og 10.

„Eks 3”

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n+1}$ konvergerer ifølge Sætning 9(a) (med $K=4$):

$$0 \leq \frac{4}{2^n+1} < \frac{4}{2^n} = 4 \cdot \frac{1}{2^n}, \text{ og}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ er en konvergent geometrisk række.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ divergerer ifølge Sætning 9(b):

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \text{ for } n \geq 2, \text{ og}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer ifølge Eks. 1

Husk, at Sætning 9 ikke siger, at
 $\sum a_n$ konvergerer $\Rightarrow \sum b_n$ konvergerer

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3n+1}{5n^3+4n^2}$ kan godt afgøres v.h.a.

Sætning 9, men det er nemmere at
bruge Sætning 10...

Af Sætning 9 følger:

Sætning 10 (Grænse-sammenlignings-Kriteriet)

(Limit Comparison Test)

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er positivefølge, og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \quad (\text{evt. } = \infty)$$

da gælder

$$(a) \quad (L < \infty \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

$$(b) \quad (L > 0 \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

Bevis:

(a):

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} < L + \overset{\varepsilon \text{ i Def. 2}}{\underset{\text{ifølge Def. 2}}{1}},$$

$\Updownarrow$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n < (L+1)b_n$$

$L < \infty \Downarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}, \text{ ifølge Sætning 9(a)}$$

(b):

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} > \frac{L}{2}, \text{ ifølge Def. 2 (med } \varepsilon = \frac{L}{2})$$

$\Downarrow$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > \frac{L}{2} \cdot b_n$$

$L > 0 \Downarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \text{ ifølge Sætning 9(b)}$$

□

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^3 + 4n^2}$

$$\frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^3 + 4n^2} \bigg/ \frac{1}{n} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{5n^3 + 4n^2} \rightarrow \frac{2}{5} \text{ for } n \rightarrow \infty$$

D.v.s. rækken diverger ifølge Sætning 10(b)
og Eks. 1.

Bemærk: Grænsesammenligningskriteriet sammenligner tilsvarende led i to forskellige rækker.

Kvotientkriteriet sammenligner nabo-led inden for samme række:

Sætning 11 (Kvotient-Kriteriet)

(Ratio test)

Hvis

- $a_n > 0$ (ultimativt)
- $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eksisterer eller er uendelig

da gælder

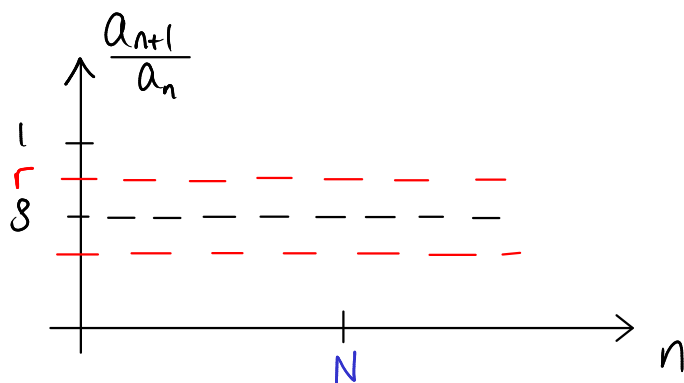
(a) $0 \leq \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

(b) $\rho > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

(c) $\rho = 1$: ingen information

Bevis:

(a): $0 \leq \delta < 1$



Ifølge Def. 2:

$$\forall r > \delta : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

Da $\delta < 1$, findes der altså et $r < 1$, sådan at:

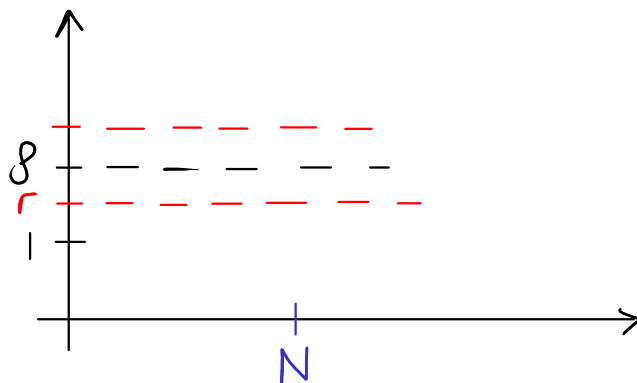
$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq r a_N \\ a_{N+2} &\leq r \cdot a_{N+1} \leq r^2 \cdot a_N \\ a_{N+3} &\leq r \cdot a_{N+2} \leq r^3 \cdot a_N \\ &\vdots \end{aligned}$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} a_n &= a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots \\ &\leq a_N + r \cdot a_N + r^2 \cdot a_N + \dots \\ &= a_N \cdot \sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad (\text{geometrisk række}) \\ &= \underbrace{a_N \cdot \frac{1}{1-r}}_{\in \mathbb{R}}, \quad \text{da } r < 1 \end{aligned}$$

(b): $\delta > 1$

Tilsvarende:



$$a_{N+1} \geq r a_N$$

$\vdots$

$$a_{N+k} \geq r^k a_N$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \geq a_N \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \infty, \text{ da } r > 1$$

(c): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverger, og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverger, men

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{og}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = 1$$



Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ divergen:

$$\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$$

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ konvergen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 / 2^{n+1}}{n^5 / 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{n^5} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$