

Indledning

I disse noter vil uddybe nogle af Øksendals resultater i afsnittene 4 og 7 samt give andre beviser for dem. Disse resultater er gennemgået til forelæsningerne.

1 Martingalerepræsentationssætningen

Lemma 1.1 (*Øksendals Lemma 4.3.1*)

Lad $T > 0$ Mængden

$$A = \{\phi(B(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid t_j \in [0, T], \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad n \in \mathbb{N}\}$$

er tæt i $L_2(\mathcal{F}_T, P)$.

Bevis: Lad (t_j) være en tæt følge i $[0, T]$ og sæt for ethvert $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{H}_n = \sigma(\{B_{t_j} \mid 1 \leq j \leq n\})$. Det er klart, at $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}_{n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Der gælder endvidere, at

$$\mathcal{F}_T = \sigma(\{\mathcal{H}_n \mid n \in \mathbb{N}\}) =_{\text{def}} \mathcal{H}_\infty \quad (1.1)$$

For at vise (1.1) bemærker vi først, at $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{F}_T$ for alle $n \in \mathbb{N}$, således at $\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{F}_T$. Lad dernæst $t \in [0, T]$ være vilkårlig. Da (t_j) er tæt i $[0, T]$, findes der en delfølge (t_{n_k}) med $t_{n_k} \rightarrow t$, således at $B_{t_{n_k}} \rightarrow B_t$ n.s.. Da alle $B_{t_{n_k}}$ 'erne er $\mathcal{H}_\infty$ -målelige, vil også B_t være $\mathcal{H}_\infty$ -målelig. Da dette gælder for alle $t \in [0, T]$, vil $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{H}_\infty$.

Lad nu $g \in L_2(\mathcal{F}_T, P)$. Martingalekonvergenssætningen giver nu, at

$$g = E(g \mid \mathcal{F}_T) = E(g \mid \mathcal{H}_\infty) = \lim E(g \mid \mathcal{H}_n) \quad \text{n.s.}, \quad (1.2)$$

og [3, Theorem 3.2] giver dernæst, at konvergensen også er i $L_2(\mathcal{F}_T)$. Da $E(g \mid \mathcal{H}_n)$ $\mathcal{H}_n$ -målelig for fast n , følger det af Doob–Dynkins Lemma, at der findes en Borelfunktion $g_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, således at $E(g \mid \mathcal{H}_n) = g_n(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$. Det følger af [2, Sætning 2.13] og egenskaberne ved den Brownske bevægelse, at $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ er en n -dimensional normalfordeling, så hvis vi sætter

$$\mu = (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})(P),$$

får μ formen $d\mu = f d\mathbf{m}_n$, hvor $\mathbf{m}_n$ betegner Lesbesguemålet på $\mathbb{R}^n$, og f er tæthedsfunktionen for en n -dimensional normalfordeling. Det følger nu af en generel sætning fra målteori, at $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ er tæt i $L_2(\mu)$. Da

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g_n^2 d\mu &= \int_{\Omega} g_n(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}) dP = \\ \int_{\Omega} E(g \mid \mathcal{H}_n)^2 dP &\leq \int_{\Omega} g^2 dP < \infty, \end{aligned}$$

vil $g_n \in L_2(\mu)$, og vi kan derfor finde en følge $(\phi_k) \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, således at $\phi_k \rightarrow g_n$ i $L_2(\mu)$. Integraltransformationssætningen giver atter, at $\phi_k(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}) \rightarrow g_n(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ i $L_2(\mathcal{F}_T, P)$. $E(g | \mathcal{H}_n)$ kan altså approksimeres i $L_2(\mathcal{F}_T, P)$ med noget fra A . Sammenholdes dette med (1.1), får vi at g kan approksimeres med noget fra A . $\square$

For at kunne forstå beviset for Øksendals Lemma 4.3.2. må vi indføre nogle begreber og uden bevis nævne nogle sætninger, som skal bruges. Vi lader som før $\mathbf{m}_n$ betegne det n -dimensionale Lebesguemål og lader $\langle \cdot, \cdot \rangle$ betegne det sædvanlige indre produkt på $\mathbb{R}^n$. Vi indfører nu

Definition 1.2 Lad $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Fouriertransformen $\hat{f}$ af $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved:

$$\hat{f}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-i \langle x, y \rangle) d\mathbf{m}_n(x)$$

for alle $y \in \mathbb{R}^n$.

Det er ikke nogen tilfældighed, at dette minder noget om karakteristiske funktioner i sandsynlighedsteori.

Der gælder følgende sætning:

Sætning 1.3 (inversionssætningen)

Hvis $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ og $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, så gælder der for n.a. $x \in \mathbb{R}^n$, at

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) \exp(i \langle x, y \rangle) d\mathbf{m}_n(y). \quad (1.3)$$

Det bør bemærkes, at man ikke kan forvente, at formel (1.3) gælder for alle $x \in \mathbb{R}^n$, da det let følger af majoriseret konvergens, at højresiden er kontinuert i x . Hvis man yderligere ved, at f er kontinuert, kommer (1.3) til at gælde for alle x .

Vi har yderligere en sætning om dette emne.

Sætning 1.4 Hvis $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, vil $\hat{\phi} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, således at inversionssætningen kan benyttes på ϕ .

Vi får også brug for lidt kompleks funktionsteori og starter med:

Definition 1.5 En funktion $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ kaldes differentiabel i punktet $z_0 \in \mathbb{C}$, hvis grænseværdien

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

eksister. $f'(z_0)$ kaldes ligesom i det reelle tilfælde for differentialkvotienten af f i punktet z_0 .

Hvis f er differentiabel i alle punkter i $\mathbb{C}$, kaldes f holomorf (eller analytisk) i $\mathbb{C}$.

Strengt taget betyder analytisk i $\mathbb{C}$, at f kan udvikles i en potensrække omkring ethvert punkt i $\mathbb{C}$, men det er en af hovedsætningerne i kompleks funktionsteori, at holomorf og analytisk er ækvivalenter begreber.

Vi får brug for følgende sætning:

Sætning 1.6 Hvis $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ er holomorf, og mængden af nulpunkter for f har et fortætningspunkt i $\mathbb{C}$, så er f identisk 0.

Korollar 1.7 Hvis $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ er holomorf, og $f(z) = 0$ for alle $z \in \mathbb{R}$, så er $f = 0$

Bevis: Ethvert punkt i $\mathbb{R}$ er et fortætningspunkt for $\mathbb{R}$. □

Vi har brug for at benytte begrebet holomorf funktion af flere variable og indfører derfor:

Definition 1.8 Lad $n \in \mathbb{N}$. En funktion $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ kaldes holomorf, hvis den er holomorf i hver variabel for sig.

Som et korollar til Sætning 1.6 får vi:

Korollar 1.9 Lad $n \in \mathbb{N}$ og lad $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ være holomorf. Hvis $f(z) = 0$ for alle $z \in \mathbb{R}^n$, så er $f = 0$.

Bevis: Lad os fastholde $t_2, t_3, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ og betragt funktionen

$$g_1(z) = f(z, t_2, t_3, \dots, t_n) \quad \text{for alle } z \in \mathbb{C}.$$

g_1 er holomorf i en variabel, og da $g_1(z) = 0$ for alle $z \in \mathbb{R}$ ifølge forudsætningerne, giver Korollar 1.7, at $g_1 = 0$, hvilket viser, at

$$f(z, t_2, t_3, \dots, t_n) = 0 \quad \text{for alle } z \in \mathbb{C} \text{ og alle } t_2, t_3, \dots, t_n \in \mathbb{R}.$$

Vi fastholder nu $z_1 \in \mathbb{C}$ og $t_3, t_4, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ og betragter funktionen

$$g_2(z) = f(z_1, z, t_3, t_4, \dots, t_n)$$

for alle $z_1, z \in \mathbb{C}$ og alle $t_3, t_4, \dots, t_n \in \mathbb{R}$.

Da g_2 er holomorf i en variabel, og da det af første trin følger, at $g_2(z) = 0$ for alle $z \in \mathbb{R}$, giver Korollar 1.7 atter, $g_2 = 0$, eller med andre ord, at

$$f(z_1, z_2, t_3, t_4, \dots, t_n) = 0$$

for alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ og alle $t_3, t_4, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Således fortsættes, indtil vi har behandlet alle n variable. □

I beviset for Øksendals Lemma 4.3.2. er det nødvendigt at vise, at funktionen G defineret ved formel (4.3.3) er holomorf, og det vil sige, at vi har brug for et argument, som gør det lovligt at

differentiere under integraltegnet i (4.3.3). Lad os lige minde om, at hvis $z \in \mathbb{C}$ med $z = x + iy$ med $x, y \in \mathbb{R}$, så er $\exp(z)$ defineret ved $\exp(z) = \exp(x) \exp(iy)$. Da $|\exp(iy)| = 1$, vil altså $|\exp(z)| = \exp(x)$. Der gælder desuden den sædvanlige rækkeudvikling:

$$\exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{for alle } z \in \mathbb{C}.$$

Vi får brug for følgende vurdering:

Lemma 1.10 Hvis $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, så gælder der:

$$\frac{|\exp(z) - 1|}{|z|} \leq \exp(|z|) \quad (1.4)$$

Bevis: Vi finder:

$$\begin{aligned} \frac{|\exp(z) - 1|}{|z|} &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right| \leq \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &\exp(|z|). \end{aligned}$$

□

Lad nu G være defineret som i Øksendals formel (4.3.3). Lad $z_2, z_3, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ være faste og lad yderligere $z, z_0 \in \mathbb{C}$ med $z \neq z_0$. Vi finder, at

$$\frac{G(z, z_2, \dots, z_n) - G(z_0, z_2, \dots, z_n)}{z - z_0} = \int_{\Omega} \frac{\exp(zB_{t_1}) - \exp(z_0B_{t_1})}{z - z_0} \exp\left(\sum_{k=2}^n z_k B_{t_k}\right) g dP, \quad (1.5)$$

og da $\exp$ er differentiabel får vi at

$$\frac{\exp(zB_{t_1}) - \exp(z_0B_{t_1})}{z - z_0} \rightarrow B_{t_1} \exp(z_0B_{t_1}) \quad (1.6)$$

for $z \rightarrow z_0$, så vi har brug for en vurdering af venstresiden, som gør det muligt at benytte majoriseret konvergens, når vi i (1.5) lader z gå mod z_0

Ved benyttelse af Lemma 1.10 finder vi for $\omega \in \Omega$ og $|z - z_0| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{|\exp(zB_{t_1}(\omega)) - \exp(z_0B_{t_1}(\omega))|}{|z - z_0|} &= |\exp(z_0B_{t_1}(\omega))| \frac{|\exp((z - z_0)B_{t_1}(\omega)) - 1|}{|z - z_0|} \leq \\ &\exp(\Re(z_0)|B_{t_1}(\omega)|) |B_{t_1}(\omega)| \exp(|z - z_0||B_{t_1}(\omega)|) \leq |B_{t_1}(\omega)| \exp(\Re(z_0)|B_{t_1}(\omega)|) \exp(|B_{t_1}(\omega)|). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Vi kan nu formulere

Lemma 1.11 *Funktionen h defineret ved*

$$h(\omega) = |B_{t_1}(\omega) \exp(\Re(z_0)|B_{t_1}(\omega)|)| \exp\left(\sum_{k=2}^n z_k B_{t_k}(\omega)\right)|$$

tilhører $L_2(P)$ og dermed vil $hg \in L_1(P)$.

Bevis: Vi bemærker, at $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ er en n -dimensional normalfordeling, og derfor har billedmålet $\mu = (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})(P)$ en tæthedsfunktion med hensyn til Lebesguemålet $\mathbf{m}_n$, som svarer til en normalfordeling. Integraltransformationssætningen giver derfor:

$$\int_{\Omega} h^2 dP = \int_{\mathbb{R}^n} x_1^2 \exp(2\Re(z_0)|x_1|) \exp\left(2 \sum_{k=2}^n z_k x_k\right) d\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) < \infty,$$

idet der jo i udtrykket for tæthedsfunktionen for μ indgår led af formen $\exp(-cx_k^2)$ for passende $c > 0$. $\square$

Det følger nu, at hg er en majorantfunktion uafhængig af z for integranten i (1.5), således at vi kan ombytte limes og integral i denne ligning, når vi lader $z \rightarrow z_0$. Sammen med (1.6) giver dette, at G er differentiabel i første variabel. På tilsvarende vis får vi, at G er differentiabel i de øvrige variable.

Vi kigger nu nærmere på Ølsendals Sætning 4.3.3. Vi lader $h \in L_2[0, T]$ og sætter som hos ham

$$Y_t = \exp\left(\int_0^t h dB - \frac{1}{2} \int_0^t h(s)^2 ds\right) \quad \text{for alle } 0 \leq t \leq T. \quad (1.8)$$

I beviset for Sætning 4.3.3 mangler der et argument for, at funktionen $(t, \omega) \rightarrow h(t)Y_t(\omega)$ tilhører $L_2([0, T] \times \Omega)$, og det vil vi give her. Vi starter med at vise:

Sætning 1.12 *For alle $t \in [0, T]$ og alle $1 \leq p < \infty$ vil $Y_t \in L_p(P)$ med*

$$E(Y_t^p) = \exp\left(\frac{p^2 - p}{2} \int_0^t h(s)^2 ds\right) \quad (1.9)$$

Bevis: Vi vil først vise påstanden for $p = 1$. Da h ikke afhænger af ω , er $\int_0^t h dB$ normalfordelt med middelværdi 0 og varians $\int_0^t h(s)^2 ds = \sigma_t^2$, og vi finder derfor:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Y_t dP &= \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(x - \frac{1}{2}\sigma_t\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_t^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \sigma_t^2)}{2\sigma_t^2}\right) dt = 1. \end{aligned}$$

Lad nu $1 < p < \infty$. Vi vil benytte det lige viste med funktionen ph i stedet for h og finder:

$$\begin{aligned} E(Y_t^p) &= E\left(\exp\left(\int_0^t (ph) dB - \frac{p}{2} \int_0^t h(s)^2 ds\right)\right) = \\ &= \exp\left(\frac{p^2 - p}{2} \int_0^t h(s)^2 ds\right) E\left(\exp\left(\int_0^t (ph) dB - \frac{1}{2} \int_0^t (ph(s))^2 ds\right)\right) = \exp\left(\frac{p^2 - p}{2} \int_0^t h(s)^2 ds\right). \end{aligned}$$

□

Vi kan nu vise:

Sætning 1.13 $\int_0^T h(t)^2 E(Y_t^2) dt = \exp(\int_0^T h(s)^2 ds) - 1$.

Bevis: Fra Sætning 1.12 får vi:

$$\begin{aligned} \int_0^T h(t)^2 E(Y_t^2) dt &= \int_0^T h(s)^2 \exp(\int_0^t h(s)^2 ds) dt = \\ (\exp(\int_0^t h(s)^2 ds))_0^T &= \exp(\int_0^T h(s)^2 ds) - 1. \end{aligned}$$

□

Sætning 1.13 giver umiddelbart det ønskede.

I forbindelse med undersøgelsen af Y_t ovenfor er det værd at komme med et par bemærkninger til løsningen til den stokastiske differentiaalligning

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t \quad (1.10)$$

hvor $r, \alpha \in \mathbb{R}$ er givne tal og N_0 ligeledes er givet.

Vi ved, at løsningen er givet ved:

$$N_t = N_0 \exp((r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t). \quad (1.11)$$

Hvis vi sætter $Y_t = \exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t)$, så er Y_t en proces af den type, vi netop har behandlet; nemlig med $h(s) = \alpha$ for alle $s \in [0, t]$. Med denne observation få vi let det følgende resultat, som Øksendal viser med et mere kompliceret argument i bemærkningen lige efter Eksempel 5.1.1.

Sætning 1.14 Hvis N_0 er uafhængig af (B_t) , så er

$$E(N_t) = E(N_0) \exp(rt)$$

Bevis: For alle $0 \leq t$ har vi, at $N_t = \exp(rt)N_0Y_t$, og af forudsætningerne følger det, at N_0 er uafhængig af Y_t . Sammen med Sætning 1.12 giver dette

$$E(N_t) = \exp(rt)E(N_0)E(Y_t) = \exp(rt)E(N_0).$$

□

2 Stoppetider

Vi minder om følgende definition:

Definition 2.1 Lad $(\mathcal{M}_t)$ være en filtrering af $\mathcal{F}$. en funktion $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ kaldes en stoppetid, hvis $(\tau \leq t) \in \mathcal{M}_t$ for alle $0 \leq t < \infty$.

Hvis stoppetiden $\tau < \infty$ n.s. og (X_t) er en $(\mathcal{M}_t)$ -tilpasset proces, vil vi ofte sætte $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$

I dette afsnit vil vi vise følgende sætning (se også Øksendals eksempel 7.2.2).

Sætning 2.2 Lad $(\mathcal{M}_t)$ være en filtrering af $\mathcal{F}$, således at

- (i) Hvis $N \in \mathcal{F}$ og $P(N) = 0$, så vil $N \in \mathcal{M}_t$ for alle $t > 0$.
- (ii) $\cap_{t>0} \mathcal{M}_t = \mathcal{M}_0$.

Lad endvidere (X_t) være en $(\mathcal{M}_t)$ -tilpasset n -dimensional proces, således at $t \rightarrow X_t(\omega)$ er kontinuert for n.a. $\omega \in \Omega$. Hvis $U \subseteq \mathbb{R}^n$ er en åben mængde, sætter vi:

$$\tau_U(\omega) = \inf\{t > 0 \mid X_t(\omega) \notin U\},$$

og her sætter vi $\inf \emptyset = \infty$. τ_U er da en stoppetid, som kaldes den første exitid fra U .

Bevis: Fra topologi følger det, at vi kan finde en følge (G_m) af åbne delmængder af U , således at:

- $\overline{G_m} \subseteq G_{m+1}$ for alle $m \in \mathbb{N}$.
- $\cup_{m=1}^{\infty} G_m = U$.

Sæt $\tau = \tau_U$ og lad først $t > 0$. Vi vil vise, at der gælder

$$\{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t\} =_{n.s.} \cup_{0 < q \in \mathbb{Q}} \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{r \in \mathbb{Q} \cap [q, t[} \{\omega \in \Omega \mid X_r(\omega) \notin G_m\}, \quad (2.1)$$

og her betyder “ $=_{n.s.}$ ”, at lighedstegnet gælder, hvis der fjernes en nulmængde. Det ses umiddelbart, at mængden på højresiden tilhører $\mathcal{M}_t$.

Hvis ω tilhører højresiden af (2.1), findes der et $q \in \mathbb{Q}$ med $q > 0$, således at vi til ethvert $m \in \mathbb{N}$ kan finde et $r_m \in \mathbb{Q} \cap [q, t[$ med $X_{r_m}(\omega) \notin G_m$. Da $[q, t]$ er kompakt, findes der en konvergent delfølge (r_{m_k}) , og hvis vi sætter $s = \lim r_{m_k}$, vil $s \in [q, t]$, og $X_{r_{m_k}}(\omega) \rightarrow X_s(\omega)$ (det er her, vi taber en nulmængde).

Hvis $X_s(\omega) \in U$, findes der et m_0 , så $X_s(\omega) \in G_{m_0}$, og da G_{m_0} er åben, findes der et k_0 med $m_{k_0} > m_0$, så $X_{r_{m_{k_0}}}(\omega) \in G_{m_0} \subseteq G_{m_{k_0}}$ for alle $k \geq k_0$. Dette er i modstrid med vælget af følgen (r_m) . Altså vil $X_s(\omega) \notin U$. Da $0 < s \leq t$ viser dette, $\tau(\omega) \leq s \leq t$.

Lad dernæst $\omega \in \Omega$ med $\tau(\omega) \leq t$. Hvis $\tau(\omega) < t$ kan vi finde et $0 < s < t$, så $X_s(\omega) \notin U$, og hvis $\tau(\omega) = t$, kan vi sætte $s = t$ og får atter $X_s(\omega) \notin U$ (et argument som i Proposition 2.4 kan

benyttes). Lad nu $q \in]0, s[\cap \mathbb{Q}$ og lad $m \in \mathbb{N}$. Hvis $X_r(\omega) \in G_m$ for alle $r \in [q, s[\cap \mathbb{Q}$, så vil

$$X_s(\omega) = \lim_{r \rightarrow s, r \in \mathbb{Q}} X_r(\omega) \in \overline{G_m} \subseteq U,$$

hvilket er en modstrid. Der findes altså et $r \in [q, s[\cap \mathbb{Q}$, så $X_r(\omega) \notin G_m$. Dette viser, at ω tilhører højresiden af (2.1).

Hvis $t = 0$ får vi at

$$(\tau = 0) = \cap_{k=1}^{\infty} (\tau \leq \frac{1}{k}) \in \cap_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{1}{k}} = \mathcal{M}_0.$$

Vi har dermed vist, at τ er en stoppetid. □

Vi skal senere se, at hvis (X_t) er en Ito diffusionsproces, så er betingelsen (ii) i sætningen opfyldt, hvis vi sætter $\mathcal{M}_t = \sigma(\{X_s \mid 0 \leq s \leq t\} \cup \mathcal{N})$.

Følgende proposition er ofte anvendelig:

Proposition 2.3 *Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være åben, og lad (G_m) være en følge af åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$, således, at $G_m \subseteq G_{m+1}$ for alle $m \in \mathbb{N}$ og således at $U = \cup_{m=1}^{\infty} G_m$. Hvis (X_t) opfylder betingelserne i Sætning 2.2 og der findes et $x_0 \in U$ med $X_0(\omega) = x_0$ for n.a. $\omega \in \Omega$, så vil $\tau_{G_m} \uparrow \tau_U$ n.s.*

Bevis: Det følger umiddelbart af definitionen, at $\tau_{G_m} \leq \tau_{G_{m+1}} \leq \tau_U$ for alle $m \in \mathbb{N}$, således at $\lim_m \tau_{G_m}$ eksisterer n.s. med

$$\lim_m \tau_{G_m} \leq \tau_U. \quad (2.2)$$

Vi bemærker, at da $x_0 \in U$, vil $\tau > 0$, så lad $\omega \in \Omega$ og lad $0 < t < \tau(\omega)$ være vilkårlig. Da vil mængden

$$K = \{X_s(\omega) \mid 0 \leq s \leq t\} \subseteq U,$$

og K vil derfor være overdækket af G_m -erne, men da $s \rightarrow X_s(\omega)$ er kontinuert, vil K være kompakt, og derfor findes det et $m_0 \in \mathbb{N}$ med $K \subseteq G_{m_0}$ (husk, at (G_m) er en voksende følge af mængder. Dette viser at hvis $m \geq m_0$, så vil $\tau_{G_m}(\omega) > t$. Dette viser påstanden. □

Det næste resultat er værd at bemærke.

Proposition 2.4 *Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være åben og lad (X_t) og τ_U være som ovenfor. Hvis $\omega \in \Omega$ med $0 < \tau_U(\omega) < \infty$, så vil $X_{\tau}(\omega) \in \partial(U)$*

Bevis: Lad os sætte $\tau = \tau_U$. Da $\tau(\omega) < \infty$, er det et rigtigt infimum, og derfor kan vi finde en følge (t_k) , således at $t_k \downarrow \tau(\omega)$ og $X_{t_k}(\omega) \notin U$. Kontinuiteten medfører, at $X_{t_k}(\omega) \rightarrow X_{\tau}(\omega)$, og da $\mathbb{R}^n \setminus U$ er lukket, vil $X_{\tau}(\omega) \notin U$.

Hvis (s_k) er en følge med $0 \leq s_k < \tau(\omega)$ og $s_k \uparrow \tau(\omega)$, så vil $X_{s_k}(\omega) \in U$, og $X_{s_k}(\omega) \rightarrow X_{\tau}(\omega)$, hvilket medfører, at $X_{\tau}(\omega) \in \overline{U}$.

Sammenfattende giver det ovenstående, at $X_\tau(\omega) \in \partial(U)$ □

Bemærk, at det følger af første del af beviset, at hvis blot $\tau_U(\omega) < \infty$, så vil $X_{\tau_U}(\omega) \notin U$. Dette benyttede vi i Sæning 2.2.

3 Bemærkninger til Dynkins formel

Dynkins formel kan findes som Sætning 7.4.1 i Øksendals bog. Hvis $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow M_{nm}$ (M_{nm} betegner rummet af $n \times m$ -matricer), og $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, så definerer vi differentialoperatoren L ved:

$$Lf(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Det følger af Øksendals sætning 7.3.3, at hvis $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, så er $Lf = Af$.

Vi har følgende udvidelse af Dynkins formel (jvf bemærkningerne efter 7.4.1):

Sætning 3.1 *Lad (X_t) være en Ito diffusion på $\mathbb{R}^n$ med*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \quad \text{og } X_0 = x.$$

Hvis τ er en stoppetid med $\mathbb{E}^x(\tau) < \infty$, og således at der findes en åben, begrænset mængde U med $x \in U$ og $\tau \leq \tau_U$ n.s., så gælder Dynkins formel for τ og alle $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, dvs

$$\mathbb{E}^x(f(X_\tau)) = f(x) + \mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau Lf(X_s)ds\right)$$

for alle $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Bevis: Lad $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ være vilkårlig. Da $\bar{U}$ er kompakt, følger det af en generel sætning fra differentialgeometri, at der findes et $f_0 \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ med $f(y) = f_0(y)$ for alle $y \in \bar{U}$. Hvis $\omega \in \Omega$ og $s < \tau(\omega)$, så vil $X_s(\omega) \in U$ og dermed $f(X_s(\omega)) = f_0(X_s(\omega))$. Yderligere vil $X_\tau(\omega) \in \bar{U}$, så $f(X_\tau(\omega)) = f_0(X_\tau(\omega))$. Derfor vil også

$$\int_0^{\tau(\omega)} Af_0(X_s(\omega))ds = \int_0^{\tau(\omega)} Lf(X_s(\omega))ds$$

Dynkins formel for f_0 giver nu umiddelbart resultatet. □

4 Lokale martingales

I dette afsnit vil vi definere og vise nogle resultater om lokale martingales. Vi lader som hidtil $(\mathcal{M}_t)$ være en filtrering af $\mathcal{F}$, som opfylder betingelserne i Sætning 2.2. Vi har følgende definition:

Definition 4.1 En n -dimensional $(\mathcal{M}_t)$ -tilpasset proces (X_t) kaldes en lokal martingale, hvis der findes en voksende følge (τ_k) af stoppetider, således at

(i) $\tau_k \rightarrow \infty$ for $k \rightarrow \infty$.

(ii) $(X_{t \wedge \tau_k})_{t \geq 0}$ er en martingale for ethvert $k \geq 1$.

Eksempel: Lad $a : [0, \infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ være en $(\mathcal{F}_t)$ -tilpasset målelig funktion, som opfylder formel (6.1) i [1], således at det generaliserede Itointegral $\int_0^t a dB$ eksisterer for ethvert $t \geq 0$. Et argument tilsvarende det på den første halve side af beviset for Sætning 6.3 i [1], hvor vi ved hjælp af stoppetider tvinger en kvadratisk integrabel integrand frem, viser, at $(\int_0^t a dB)_{t \geq 0}$ er en lokal martingale.

Sætning 4.2 Lad (X_t) være en kontinuert, nedadtil begrænset lokal martingale tilpasset $(\mathcal{M}_t)$. Da er (X_t) en supermartingale.

Bevis: Lad (τ_k) være en voksende følge af stoppetider, som opfylder betingelserne i Sætning 4.1. Da $X_{t \wedge \tau_k} \rightarrow X_t$ n.s for $k \rightarrow \infty$, og (X_t) er nedadtil begrænset, kan vi benytte Fatous lemma for betingede middelværdier, som for $s < t$ giver:

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{M}_s) \leq \liminf_k \mathbb{E}(X_{t \wedge \tau_k} \mid \mathcal{M}_s) = \lim_k X_{s \wedge \tau_k} = X_s,$$

hvilket viser, at (X_t) er en supermartingale. □

Sammenlign dette bevis med anden halvdel af beviset for Sætning 6.3 i [1]. Det er ikke nogen tilfældighed, at det ligner. Hvorfor?

References

- [1] N.J. Nielsen, *Brownian Motion and Stochastic Integrals*, Noter SDU, **2015**
- [2] N.J. Nielsen, *Den Brownske bevægelse*, Noter SDU.
- [3] N.J. Nielsen, *Resumé of the lectures in Probability Theory II*, **2015**