

Analyse af ombytningspuslespil

Konkret eksempel på algoritmeanalyse

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside.

Spørgsmål:

- ▶ Hvilken bedste (laveste) score kan du opnå på 5 forsøg?
- ▶ Hvilken algoritme bruger du?
- ▶ Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?
- ▶ Afhænger det af input (startopstillingen)?
- ▶ Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?
- ▶ Er den grådige algoritme (sæt én på plads i hvert skridt) bedst mulig, eller kan man få flere skridt hvor to sættes på plads ved nogle gange at undlade at sætte een på plads?
- ▶ Hvis grådig *er* bedst mulig, er der andre algoritmer som er lige så gode (eller *skal* man sætte én på plads hver gang for at være bedste mulig)?
- ▶ Mere generelt, kan vi præcist karakterisere de bedst mulige algoritmer?

Model af puslespil

Vi modellerer brikkerne i et puslespil som tallene $1, 2, 3, \dots, n$, nummereret efter opstillingen når puslespillet er løst:

5	10	14	3
1	11	9	15
8	7	2	12
4	13	6	16

→

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

NB: dette kan også ses som et array:

5	10	14	3	1	11	9	15	8	7	2	12	4	13	6	16
---	----	----	---	---	----	---	----	---	---	---	----	---	----	---	----

Dette gør vi til opgavetimerne (i Java-opgaverne)

En opstilling af tallene $1, 2, 3, \dots, n$ i et array af længde n kaldes også en [permutation](#).

Den grådige algoritme

WHILE ikke alle brikker på plads:
 vælg en brik ikke på plads
 byt den med brikken på dens plads

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf k allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt $n - k$ ombytninger.

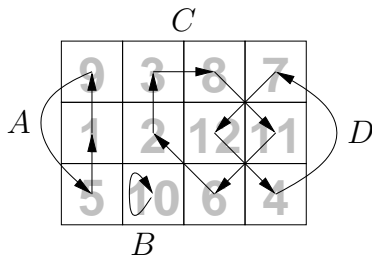
For et puslespil med n brikker, hvoraf k allerede står på plads, hvad er det minimale antal ombytninger?

For hver ombytning: højst to brik kommer på plads. Derfor mindst $(n - k)/2$ ombytninger.

Kredse

Bedre analyse end “mellem $(n - k)/2$ og $n - k$ ombytninger”?

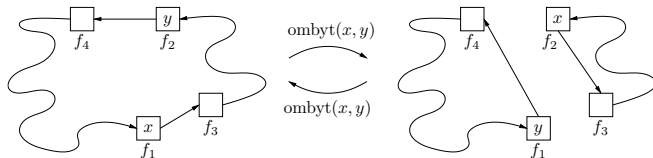
Observation: en permutation giver på naturlig måde anledning til en samling kredse (engelsk: cycles):



Idé: Et tal (brik) t peger på det tal (brik), som står på *plads* t .

Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



Observation: En brik er på den rigtige plads \Leftrightarrow brik er i en kreds af længde én.

Derfor: puslespil løst \Leftrightarrow der er n kredse.

Konklusion: Et puslespil med n brikker og k kredse i startopstillingen kræver mindst $n - k$ ombytninger, og man kan altid gøre det med $n - k$ ombytninger (f.eks. via den grådige algoritme, som i hvert skridt deler en kreds af længde t i to kredse af længde $t - 1$ og 1).

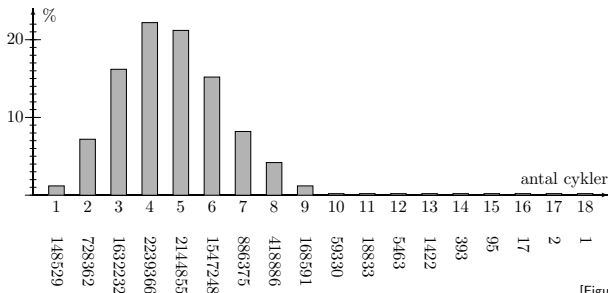
Konklusion: En algoritme bruger det optimale antal ombytninger ($n - k$) hvis og kun hvis hver ombytning er med to brikker som er i samme kreds.

Forventet antal kredse

Sætning (uden bevis her): Det forventede antal kredse i en tilfældig permutation er

$$H_n = \sum_{i=1}^n 1/i$$

Ved simulering (afprøvning, 10.000.000 tilfældige permutationer) for $n = 64$ ses følgende fordeling af antallet af permutationer:



[Figur: Gerth Brodal]