


Algoritmer for Max Sum Problemet

Maximum Sum problemet

Givet et array (liste) af tal kan vi se på summer af segmenter (del-arrays).

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|---|----|---|---|----|---|----|---|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |




I segmentet ovenfor er summen

$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = 7$$

Maximum Sum problemet

Givet et array (liste) af tal kan vi se på summer af segmenter (del-arrays).

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|---|----|---|---|----|---|----|---|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |



I segmentet ovenfor er summen


$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = 7$$

Spørgsmål: Hvilket segment har størst sum?

Maximum Sum problemet

Givet et array (liste) af tal kan vi se på summer af segmenter (del-arrays).

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|---|----|---|---|----|---|----|---|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |



I segmentet ovenfor er summen

$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = 7$$


Spørgsmål: Hvilket segment har størst sum?

Et simpelt og fundamentalt problem

Maximum Sum problemet

Givet et array (liste) af tal kan vi se på summer af segmenter (del-arrays).

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|---|----|---|---|----|---|----|---|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |



I segmentet ovenfor er summen

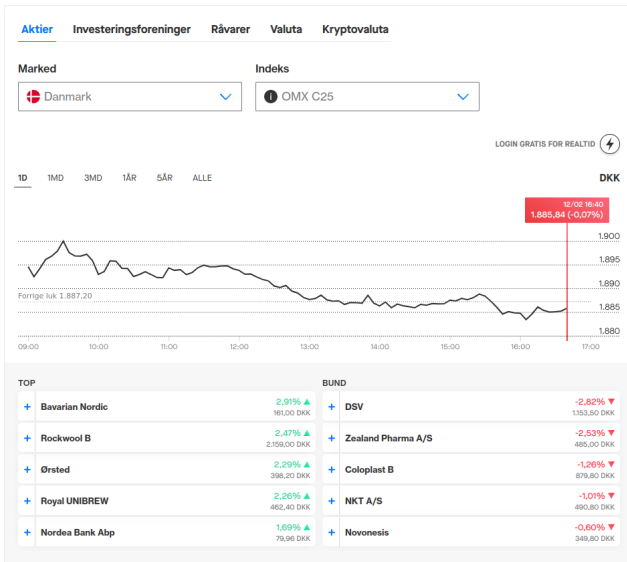
$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = 7$$

Spørgsmål: Hvilket segment har størst sum?

Et simpelt og fundamentalt problem

[Definition: det tomme segment af længde nul er også et lovligt segment, og har værdien 0.]

Mere motivation for MaxSum problemet: aktieanalyse




(Fra www.euroinvestor.dk)

Aktieanalyse

Vi har data af følgende type:

Aktie for Firma X:

| 2023.02.20 | 2023.02.21 | 2023.02.22 | 2023.02.23 | 2023.02.24 | 2023.02.25 | 2023.02.26 |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| +2% | -3% | +8% | -1% | -3% | +3% | +11% |



Spørgsmål: I hvilken periode har det været bedst at eje aktien?

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

Hvis 1000 kr. først stiger med 3% og derefter falder med 2% bliver det til

Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

Hvis 1000 kr. først stiger med 3% og derefter falder med 2% bliver det til

$$1000 \cdot 1.03 \cdot 0.98 (= 1009.40) \text{ kr.}$$

Procentregning


Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

Hvis 1000 kr. først stiger med 3% og derefter falder med 2% bliver det til

$$1000 \cdot 1.03 \cdot 0.98 (= 1009.40) \text{ kr.}$$

| 2023.02.20 | 2023.02.21 | 2023.02.22 | 2023.02.23 | 2023.02.24 | 2023.02.25 | 2023.02.26 |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| +2% | -3% | +8% | -1% | -3% | +3% | +11% |



I perioden ovenfor har aktien forandret sig med en faktor

$$0.97 \cdot 1.08 \cdot 0.99 \cdot 0.97 \cdot 1.03$$

Aktieanalyse

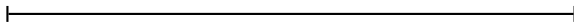
| 2023.02.20 | 2023.02.21 | 2023.02.22 | 2023.02.23 | 2023.02.24 | 2023.02.25 | 2023.02.26 |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| +2% | -3% | +8% | -1% | -3% | +3% | +11% |



Spørgsmål: I hvilken periode har det været bedst at eje aktien?



| | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.02 | 0.97 | 1.08 | 0.99 | 0.97 | 1.03 | 1.11 |
|------|------|------|------|------|------|------|



Spørgsmål: Hvilket segment har **størst produkt**?

Fra maximum produkt til maximum sum

Logaritmer er voksende funktioner. Så

$$0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99 \leq 0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01$$

hvis og kun hvis

$$\log(0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99) \leq \log(0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01)$$

Fra maximum produkt til maximum sum

Logaritmer er voksende funktioner. Så

$$0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99 \leq 0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01$$

hvis og kun hvis

$$\log(0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99) \leq \log(0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01)$$

Da $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$, gælder ovenstående hvis og kun hvis

$$\log(0.94) + \log(1.05) + \log(0.99) \leq \log(0.96) + \log(1.03) + \log(1.01)$$

Fra maximum produkt til maximum sum

Så segmentet, der har **størst produkt** i dette array:

| | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.02 | 0.97 | 1.08 | 0.99 | 0.97 | 1.03 | 1.11 |
|------|------|------|------|------|------|------|



er det samme som segmentet der har **størst sum** i dette array:

| | | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\log 1.02$ | $\log 0.97$ | $\log 1.08$ | $\log 0.99$ | $\log 0.97$ | $\log 1.03$ | $\log 1.11$ |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|

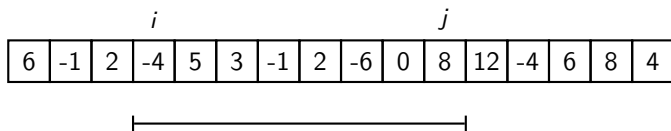


| | | | | | | |
|--------|---------|--------|---------|---------|--------|--------|
| 0.0286 | -0.0439 | 0.1110 | -0.0145 | -0.0439 | 0.0426 | 0.1506 |
|--------|---------|--------|---------|---------|--------|--------|



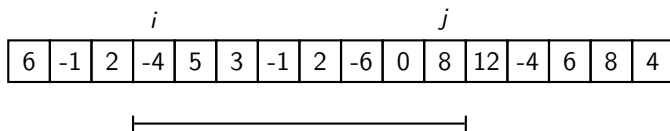
Algoritmer for MaxSum

Vi skal finde summen for alle segmenter:



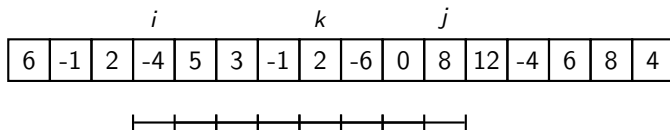
Algoritmer for MaxSum

Vi skal finde summen for alle segmenter:



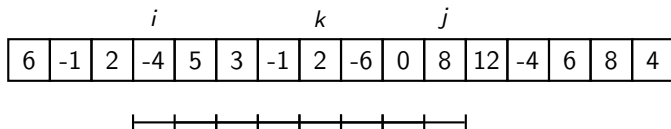
Naturlig algoritme ud fra definitionen:

For alle i og for alle $j \geq i$, lav summen fra i til og med j .



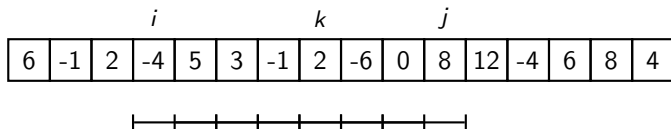
Første algoritme for MaxSum

```
MAXSUM1( $n$ )  
  maxSoFar = 0  
  for  $i = 0$  to  $n - 1$   
    for  $j = i$  to  $n - 1$   
      sum = 0  
      for  $k = i$  to  $j$   
        sum +=  $A[k]$   
      maxSoFar = max(maxSoFar, sum);  
  return maxSoFar
```



Første algoritme for MaxSum

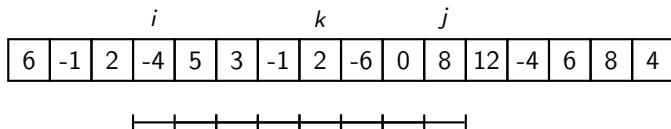
```
MAXSUM1( $n$ )  
  maxSoFar = 0  
  for  $i = 0$  to  $n - 1$   
    for  $j = i$  to  $n - 1$   
      sum = 0  
      for  $k = i$  to  $j$   
        sum +=  $A[k]$   
      maxSoFar = max(maxSoFar, sum);  
  return maxSoFar
```



Korrekt? Følger af definition af problem.

Første algoritme for MaxSum

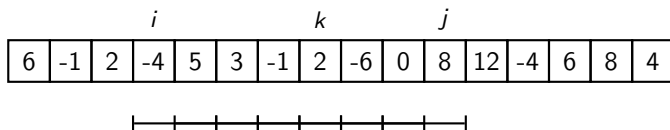
```
MAXSUM1( $n$ )  
  maxSoFar = 0  
  for  $i = 0$  to  $n - 1$   
    for  $j = i$  to  $n - 1$   
      sum = 0  
      for  $k = i$  to  $j$   
        sum +=  $A[k]$   
      maxSoFar = max(maxSoFar, sum);  
  return maxSoFar
```



Korrekt? Følger af definition af problem. Køretid?

Første algoritme for MaxSum

```
MAXSUM1( $n$ )  
  maxSoFar = 0  
  for  $i = 0$  to  $n - 1$   
    for  $j = i$  to  $n - 1$   
      sum = 0  
      for  $k = i$  to  $j$   
        sum +=  $A[k]$   
      maxSoFar = max(maxSoFar, sum);  
  return maxSoFar
```



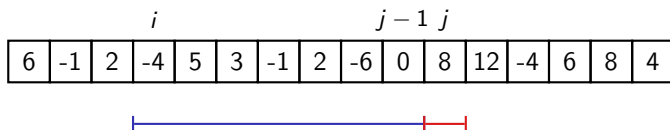
Korrekt? Følger af definition af problem. Køretid? $\Theta(n^3)$, med samme argument som for Algoritme 3 fra asymptotisk analyse eksemplerne (de har helt samme struktur).

Observation

$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 = (-1)$$

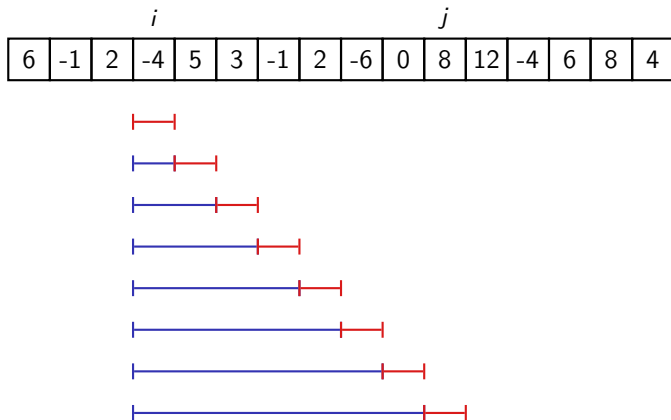
\Downarrow

$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = (-1) + 8 = 7$$



Idé til forbedret algoritme

Algoritme: For hvert i , beregn summer for stigende j med én ny addition per sum.



Anden algoritme for MaxSum

```
MAXSUM2( $n$ )  
  maxSoFar = 0  
  for  $i = 0$  to  $n - 1$   
    sum = 0  
    for  $j = i$  to  $n - 1$   
      sum +=  $A[j]$   
      maxSoFar = max(maxSoFar, sum);  
  return maxSoFar
```

Anden algoritme for MaxSum

```
MAXSUM2( $n$ )  
  maxSoFar = 0  
  for  $i = 0$  to  $n - 1$   
    sum = 0  
    for  $j = i$  to  $n - 1$   
      sum +=  $A[j]$   
      maxSoFar = max(maxSoFar, sum);  
  return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt observationen ovenfor.

Anden algoritme for MaxSum

```
MAXSUM2( $n$ )  
  maxSoFar = 0  
  for  $i = 0$  to  $n - 1$   
    sum = 0  
    for  $j = i$  to  $n - 1$   
      sum +=  $A[j]$   
      maxSoFar = max(maxSoFar, sum);  
  return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt observationen ovenfor.

Køretid?

Anden algoritme for MaxSum

```
MAXSUM2( $n$ )  
    maxSoFar = 0  
    for  $i = 0$  to  $n - 1$   
        sum = 0  
        for  $j = i$  to  $n - 1$   
            sum +=  $A[j]$   
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);  
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt observationen ovenfor.

Køretid? $\Theta(n^2)$, med ca. samme argument som for Algoritme 2 fra asymptotisk analyse eksemplerne.

Ny observation

$$x_1 \leq x_2$$



$$x_1 + 2 \leq x_2 + 2$$

Ny observation

$$\begin{aligned}x_1 &\leq x_2 \\ \Updownarrow \\ x_1 + 2 &\leq x_2 + 2\end{aligned}$$

Heraf følger:

$$\max\{x_1 + 2, x_2 + 2, \dots, x_i + 2\} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_i\} + 2$$

Ny observation

$$\begin{aligned}x_1 &\leq x_2 \\ \Updownarrow \\ x_1 + 2 &\leq x_2 + 2\end{aligned}$$

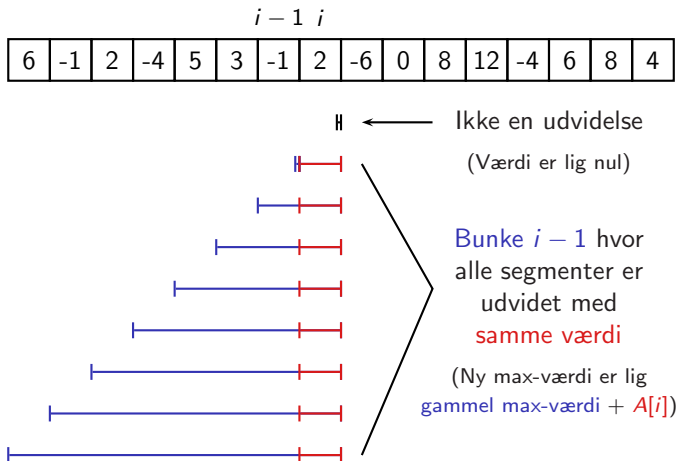
Heraf følger:

$$\max\{x_1 + 2, x_2 + 2, \dots, x_i + 2\} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_i\} + 2$$

Idé: Kan vi kigge på segmenter i bunker, således at den nye bunke er lig den gamle bunke med alle segmenter udvidet med den samme værdi?

Idé til forbedret algoritme

Lad bunke i være alle segmenter, som ender ved $A[i]$ (s højre kant). Så er bunke i det samme som bunke $i - 1$ med alle segmenter udvidet med den samme værdi, plus det tomme segment:



Tredie algoritme for MaxSum

```
MAXSUM3( $n$ )  
    maxSoFar = 0  
    maxEndingHere = 0  
    for  $i = 0$  to  $n - 1$   
        maxEndingHere = max(maxEndingHere +  $A[i]$ , 0)  
        maxSoFar = max(maxSoFar, maxEndingHere);  
    return maxSoFar
```

Tredie algoritme for MaxSum

```
MAXSUM3( $n$ )  
  maxSoFar = 0  
  maxEndingHere = 0  
  for  $i = 0$  to  $n - 1$   
    maxEndingHere = max(maxEndingHere +  $A[i]$ , 0)  
    maxSoFar = max(maxSoFar, maxEndingHere);  
  return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt den nye observation ovenfor, som sikrer, at vi tager maksimum over alle segmenter (da ethvert segment er med i en bunke, nemlig bunken for det i , hvor segmentet ender).

Tredie algoritme for MaxSum

```
MAXSUM3( $n$ )  
    maxSoFar = 0  
    maxEndingHere = 0  
    for  $i = 0$  to  $n - 1$   
        maxEndingHere = max(maxEndingHere +  $A[i]$ , 0)  
        maxSoFar = max(maxSoFar, maxEndingHere);  
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt den nye observation ovenfor, som sikrer, at vi tager maksimum over alle segmenter (da ethvert segment er med i en bunke, nemlig bunken for det i , hvor segmentet ender).

Køretid?

Tredie algoritme for MaxSum

```
MAXSUM3( $n$ )  
    maxSoFar = 0  
    maxEndingHere = 0  
    for  $i = 0$  to  $n - 1$   
        maxEndingHere = max(maxEndingHere +  $A[i]$ , 0)  
        maxSoFar = max(maxSoFar, maxEndingHere);  
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt den nye observation ovenfor, som sikrer, at vi tager maksimum over alle segmenter (da ethvert segment er med i en bunke, nemlig bunken for det i , hvor segmentet ender).

Køretid? Der er n iterationer, som hver tager $\Theta(1)$ tid. Det giver alt i alt $\Theta(n)$.