

Prioritetskøer

Prioritetskøer?



Prioritetskøer?



En prioritetskø er en **datastruktur**.

Datastrukturer

Datastruktur = data + operationer herpå

Datastrukturer

| |
|---|
| Datastruktur = data + operationer herpå |
|---|

Data:

- ▶ Normalt struktureret som en ID plus yderligere data. ID kaldes også en nøgle (key).
- ▶ Vi nævner normalt ikke den yderligere data. Dvs. elementer omtales blot som ID, men er reelt (ID,data) eller (ID,reference til data).
- ▶ ID er ofte fra et ordnet univers (har en ordning), f.eks. `int`, `float`, `String`.

Datastrukturer

| |
|---|
| Datastruktur = data + operationer herpå |
|---|

Data:

- ▶ Normalt struktureret som en ID plus yderligere data. ID kaldes også en nøgle (key).
- ▶ Vi nævner normalt ikke den yderligere data. Dvs. elementer omtales blot som ID, men er reelt (ID,data) eller (ID,reference til data).
- ▶ ID er ofte fra et ordnet univers (har en ordning), f.eks. `int`, `float`, `String`.

Operationer:

- ▶ Datastrukturens egenskaber udgøres af **de tilbudte operationer**, samt **deres køretider**.
- ▶ Målene er **fleksibilitet** og **effektivitet** (som regel modstridende mål).

Datastrukturer

Tænk på en datastruktur som et API for adgang til en samling data.

- ▶ **Datastrukturer niveau 1:** de tilbudte operationer (i C# og Java: et interface).
- ▶ **Datastrukturer niveau 2:** en konkret implementation af de tilbudte operationer (i Python, C# og Java: en klasse som implementerer interfacet).

En givent sæt operationer (niveau 1) kan have mange forskellig implementationer (niveau 2), ofte med forskellige køretider.

Datastrukturer

Tænk på en datastruktur som et API for adgang til en samling data.

- ▶ **Datastrukturer niveau 1:** de tilbudte operationer (i C# og Java: et interface).
- ▶ **Datastrukturer niveau 2:** en konkret implementation af de tilbudte operationer (i Python, C# og Java: en klasse som implementerer interfacet).

En givent sæt operationer (niveau 1) kan have mange forskellig implementationer (niveau 2), ofte med forskellige køretider.

I dette kursus: katalog af **datastrukturer (niveau 1) med bred anvendelse** samt **effektive implementationer (niveau 2) heraf**.

Prioritetskøer

Prioritetskøer, niveau 1:

Data:

- ▶ Element = nøgle (ID) fra et ordnet univers samt evt. yderligere data.

Prioritetskøer

Prioritetskøer, niveau 1:

Data:

- ▶ Element = nøgle (ID) fra et ordnet univers samt evt. yderligere data.

Centrale operationer (max-version af prioritetskø):

- ▶ $Q.\text{EXTRACT-MAX}()$: Returnerer elementet med den største nøgle i prioritetskøen Q (et vilkårligt sådant element, hvis der er flere lige store). Elementet fjernes fra Q .
- ▶ $Q.\text{INSERT}(e: \text{element})$. Tilføjer elementet e til prioritetskøen Q .

Prioritetskøer

Prioritetskøer, niveau 1:

Data:

- ▶ Element = nøgle (ID) fra et ordnet univers samt evt. yderligere data.

Centrale operationer (max-version af prioritetskø):

- ▶ $Q.\text{EXTRACT-MAX}()$: Returnerer elementet med den største nøgle i prioritetskøen Q (et vilkårligt sådant element, hvis der er flere lige store). Elementet fjernes fra Q .
- ▶ $Q.\text{INSERT}(e: \text{element})$. Tilføjer elementet e til prioritetskøen Q .

Bemærk: vi kan sortere med disse operationer:

Prioritetskøer

Prioritetskøer, niveau 1:

Data:

- ▶ Element = nøgle (ID) fra et ordnet univers samt evt. yderligere data.

Centrale operationer (max-version af prioritetskø):

- ▶ $Q.\text{EXTRACT-MAX}()$: Returnerer elementet med den største nøgle i prioritetskøen Q (et vilkårligt sådant element, hvis der er flere lige store). Elementet fjernes fra Q .
- ▶ $Q.\text{INSERT}(e: \text{element})$. Tilføjer elementet e til prioritetskøen Q .

Bemærk: vi kan sortere med disse operationer:

$n \times \text{INSERT}$

$n \times \text{EXTRACT-MAX}$

Prioritetskøer

Prioritetskøer, niveau 1:

Ekstra operationer:

- ▶ $Q.INCREASE-KEY(r: \text{reference til et element i } Q, k \text{ nøgle})$. Ændrer nøglen til $\max\{k, \text{gamle nøgle}\}$ for elementet refereret til af r .
- ▶ $Q.BUILD(L: \text{liste af elementer})$. Bygger en prioritetskø indeholdende elementerne i listen L .

Prioritetskøer

Prioritetskøer, niveau 1:

Ekstra operationer:

- ▶ $Q.INCREASE-KEY(r: \text{reference til et element i } Q, k \text{ nøgle})$. Ændrer nøglen til $\max\{k, \text{gamle nøgle}\}$ for elementet refereret til af r .
- ▶ $Q.BUILD(L: \text{liste af elementer})$. Bygger en prioritetskø indeholdende elementerne i listen L .

Trivielle operationer for alle datastrukturer:

- ▶ $Q.CREATENEWEMPTY()$, $Q.DESTRUCTEMPTY()$,
 $Q.ISEMPTY?()$.

Vil ikke blive nævnt fremover.

Implementation via heaps

En mulig implementation (niveau 2): brug heapstrukturen fra Heapsort.

Implementation via heaps

En mulig implementation (niveau 2): brug heapstrukturen fra Heapsort.

Vi har allerede:

- ▶ EXTRACT-MAX:

Implementation via heaps

En mulig implementation (niveau 2): brug heapstrukturen fra Heapsort.

Vi har allerede:

- ▶ **EXTRACT-MAX**: Er essentielt hvad der bruges under anden del af Heapsort – fjern rod, flyt sidste blad op som rod, kald **HEAPIFY**.

Implementation via heaps

En mulig implementation (niveau 2): brug heapstrukturen fra Heapsort.

Vi har allerede:

- ▶ **EXTRACT-MAX**: Er essentielt hvad der bruges under anden del af Heapsort – fjern rod, flyt sidste blad op som rod, kald **HEAPIFY**.
Køretid:

Implementation via heaps

En mulig implementation (niveau 2): brug heapstrukturen fra Heapsort.

Vi har allerede:

- ▶ **EXTRACT-MAX**: Er essentielt hvad der bruges under anden del af Heapsort – fjern rod, flyt sidste blad op som rod, kald **HEAPIFY**.
Køretid: $O(\log n)$.
- ▶ **BUILD**:

Implementation via heaps

En mulig implementation (niveau 2): brug heapstrukturen fra Heapsort.

Vi har allerede:

- ▶ **EXTRACT-MAX**: Er essentielt hvad der bruges under anden del af Heapsort – fjern rod, flyt sidste blad op som rod, kald **HEAPIFY**.
Køretid: $O(\log n)$.
- ▶ **BUILD**: Brug **HEAPIFY** gentagne gange bottom-up.

Implementation via heaps

En mulig implementation (niveau 2): brug heapstrukturen fra Heapsort.

Vi har allerede:

- ▶ **EXTRACT-MAX**: Er essentielt hvad der bruges under anden del af Heapsort – fjern rod, flyt sidste blad op som rod, kald **HEAPIFY**.
Køretid: $O(\log n)$.
- ▶ **BUILD**: Brug **HEAPIFY** gentagne gange bottom-up. Køretid:

Implementation via heaps

En mulig implementation (niveau 2): brug heapstrukturen fra Heapsort.

Vi har allerede:

- ▶ **EXTRACT-MAX**: Er essentielt hvad der bruges under anden del af Heapsort – fjern rod, flyt sidste blad op som rod, kald **HEAPIFY**.
Køretid: $O(\log n)$.
- ▶ **BUILD**: Brug **HEAPIFY** gentagne gange bottom-up. Køretid: $O(n)$.

Implementation via heaps

En mulig implementation (niveau 2): brug heapstrukturen fra Heapsort.

Vi har allerede:

- ▶ **EXTRACT-MAX**: Er essentielt hvad der bruges under anden del af Heapsort – fjern rod, flyt sidste blad op som rod, kald **HEAPIFY**.
Køretid: $O(\log n)$.
- ▶ **BUILD**: Brug **HEAPIFY** gentagne gange bottom-up. Køretid: $O(n)$.

Mangler:

- ▶ **INSERT**
- ▶ **INCREASE-KEY**

Implementation via heaps

En mulig implementation (niveau 2): brug heapstrukturen fra Heapsort.

Vi har allerede:

- ▶ **EXTRACT-MAX**: Er essentielt hvad der bruges under anden del af Heapsort – fjern rod, flyt sidste blad op som rod, kald **HEAPIFY**. Køretid: $O(\log n)$.
- ▶ **BUILD**: Brug **HEAPIFY** gentagne gange bottom-up. Køretid: $O(n)$.

Mangler:

- ▶ **INSERT**
- ▶ **INCREASE-KEY**

[Detalje: I C# og Java kræver array-versionen af heaps et kendt maximum for størrelsen af køen. Alternativt kan array erstattes af et extendible array, f.eks. `List` i C#, `ArrayList` i Java eller lister i Python. Man kan også implementere heaptræet via pointere/referencer, lige som vi gør med søgetræer lidt senere.]

Increase-Key

Increase-Key

1. Ændre nøgle for element.

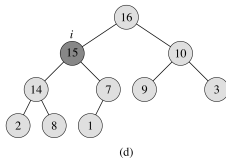
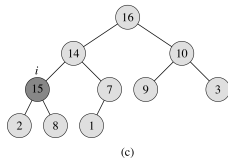
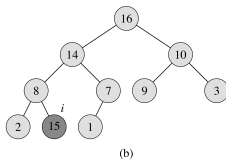
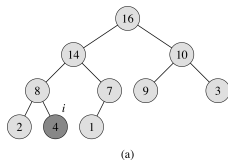
Increase-Key

1. Ændre nøgle for element.
2. Genopret heaporden: så længe elementet er stærkere end forælder, skift plads med denne.

Increase-Key

1. Ændre nøgle for element.
2. Genopret heaporden: så længe elementet er stærkere end forælder, skift plads med denne.

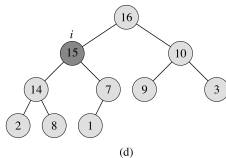
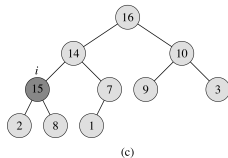
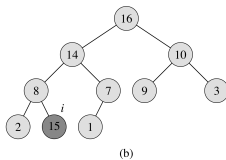
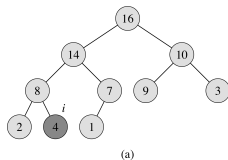
Eksempel med $\text{INCREASE-KEY}(i, 15)$:



Increase-Key

1. Ændre nøgle for element.
2. Genopret heaporden: så længe elementet er stærkere end forælder, skift plads med denne.

Eksempel med $\text{INCREASE-KEY}(i, 15)$:

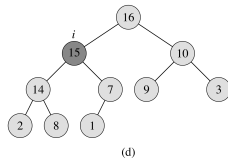
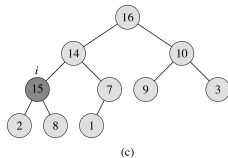
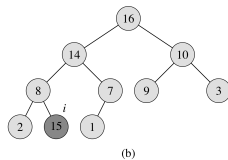
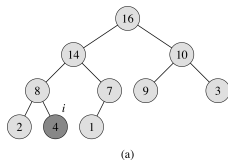


Køretid:

Increase-Key

1. Ændre nøgle for element.
2. Genopret heaporden: så længe elementet er stærkere end forælder, skift plads med denne.

Eksempel med $\text{INCREASE-KEY}(i, 15)$:



Køretid: Højden af træet, dvs. $O(\log n)$.

Insert

Insert

1. Indsæt det nye element sidst (\Rightarrow heapfacon i orden).

Insert

1. Indsæt det nye element sidst (\Rightarrow heapfacon i orden).
2. Genopret heaporden præcis som i Increase-Key: så længe elementet er større end forælder, skift plads med denne.

Insert

1. Indsæt det nye element sidst (\Rightarrow heapfacon i orden).
2. Genopret heaporden præcis som i Increase-Key: så længe elementet er større end forælder, skift plads med denne.

Køretid:

Insert

1. Indsæt det nye element sidst (\Rightarrow heapfacon i orden).
2. Genopret heaporden præcis som i Increase-Key: så længe elementet er større end forælder, skift plads med denne.

Køretid: Højden af træet, dvs. $O(\log n)$.

Forskellige implementationer af prioritetskøer

Samme niveau 1, forskellige niveau 2:

| | <i>Heap</i> | <i>Usorteret liste</i> | <i>Sorteret liste</i> |
|--------------|-------------|------------------------|-----------------------|
| EXTRACT-MAX | $O(\log n)$ | $O(n)$ | $O(1)$ |
| BUILD | $O(n)$ | $O(1)$ | $O(n \log n)$ |
| INCREASE-KEY | $O(\log n)$ | $O(1)$ | $O(n)$ |
| INSERT | $O(\log n)$ | $O(1)$ | $O(n)$ |

Forskellige implementationer af prioritetskøer

Samme niveau 1, forskellige niveau 2:

| | <i>Heap</i> | <i>Usorteret liste</i> | <i>Sorteret liste</i> |
|--------------|-------------|------------------------|-----------------------|
| EXTRACT-MAX | $O(\log n)$ | $O(n)$ | $O(1)$ |
| BUILD | $O(n)$ | $O(1)$ | $O(n \log n)$ |
| INCREASE-KEY | $O(\log n)$ | $O(1)$ | $O(n)$ |
| INSERT | $O(\log n)$ | $O(1)$ | $O(n)$ |

Ovenstående samling operationer (niveau 1) er for max-prioritetskøer. Der er naturligvis nemt at lave min-prioritetskøer med operationerne

EXTRACT-MIN, BUILD, DECREASE-KEY, INSERT,

blot ved at vende alle uligheder mellem nøgler i definitioner og algoritmer.