

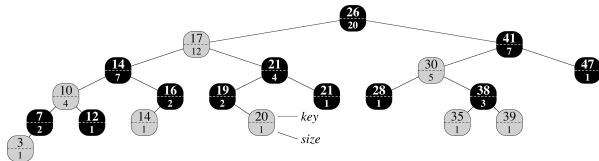
Binære søgetræer med ekstra information i knuderne

Tilføj ekstra information i knuderne

Konkret eksempel på ekstra information i knuder:

Alle knuder gemmer størrelsen af deres undertræ (dvs. antallet af knuder i deres undertræ).

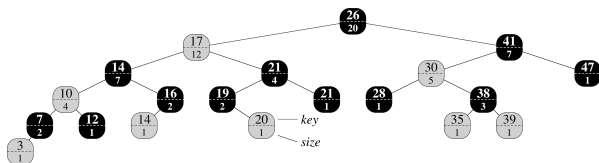
Et binært søgetræ (rød-sort) med denne information tilføjet:



Ny funktionalitet

Målet med ekstra information i knuderne er at tilføje ekstra funktionalitet. F.eks. kan man i eksemplet ovenfor (med størrelse af undertræer gemt i knuder) udføre flg. operationer i $O(\log n)$ tid:

- Find rang af en given nøgle.
- Find nøgle som har en given rang.

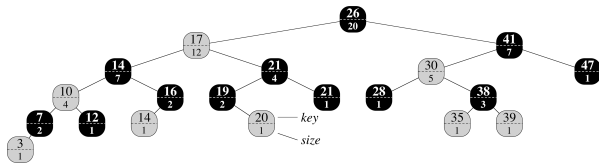


Her er **rang** nøglens nummer i sorteret orden (blandt de gemte).

Nøgle:		3	7	10	12	14	14	16	17	19	20	21	...
Rang:		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Ny funktionalitet, implementation

- ▶ Find rang af en given nøgle.
- ▶ Find nøgle som har en given rang.



OS-RANK(T, x)

```
 $r = x.left.size + 1$   
 $y = x$   
while  $y \neq T.root$   
    if  $y == y.p.right$   
         $r = r + y.p.left.size + 1$   
     $y = y.p$   
return  $r$ 
```

OS-SELECT(x, i)

```
 $r = x.left.size + 1$   
if  $i == r$   
    return  $x$   
elseif  $i < r$   
    return OS-SELECT( $x.left, i$ )  
else return OS-SELECT( $x.right, i - r$ )
```

[NB: denne pseudo-kode fra bogen antager, at der bruges et eksplikt knude-objekt (med $size = 0$) til at repræsentere NIL (blade).]

Vedligehold den ekstra information i knuderne

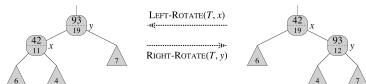
Antag følgende egenskab gælder for den ekstra information:

Hvis en knudes to børns værdier k_1 og k_2 allerede er korrekte, kan knudes egen værdi k beregnes i $O(1)$ tid. Et blads værdi kan beregnes i $O(1)$ tid.

I eksemplet ovenfor: k kan findes som $1 + k_1 + k_2$.

Af antagelsen følger, at værdierne kan vedligeholdes under updates i rød-sort søgetræer, og dette uden at ændre $O(\log n)$ køretiden:

- ▶ Knuder uden for sti fra indsat/slettet knude til rod skal ikke have deres værdi ændret (bottom-up beregning giver uændret resultat).
- ▶ Under rebalancering: genberegner for berørte knuder efter hver rotation og efter hvert skridt opad. Til sidst: genberegner på sti fra sidste rebalanceringssted til rod.



Andre eksempler

Vedligeholdelsessystemet ovenfor vil altid fungere når følgende gælder:

Hvis en knudes to børns værdier k_1 og k_2 allerede er korrekte, kan knudes egen værdi k beregnes i $O(1)$ tid. Et blads værdi kan beregnes i $O(1)$ tid.

Flere eksempler på information som opfylder dette (vi antager, at hvert element udover søgenøglen har noget associeret data, som er et tal):

- ▶ Maksimum af data-værdier i undertræet.
- ▶ Minimum af data-værdier i undertræet.
- ▶ Sum af data-værdier i undertræet.

Via sådan information kan man tilføje yderligere funktionalitet til træet. F.eks. kan man søge efter elementer med den maksimale dataværdi. Eller man kan finde gennemsnittet af dataværdierne i en knudes undertræ (gennemsnit = sum af dataværdier / antal knuder).