

# Grådige algoritmer

# Grådige algoritmer

Et generelt algoritme-konstruktionsprincip (“paradigme”) for kombinatoriske optimeringsproblemer.

Ideen er simpel: Opbyg løsningen bid for bid ved hele tiden af vælge, hvad der lige nu ser ud som “bedste valg” (uden at tænke på resten af løsningen).

Dvs. man håber på, at **lokal** optimering giver **global** optimering.

Som pseudo-kode:

Start med en tom struktur  $S$

**While**  $S$  ikke en løsning:

    Vælg den byggekalds  $x$ , som ser bedst ud lige nu

$S = S$  tilføjet  $x$

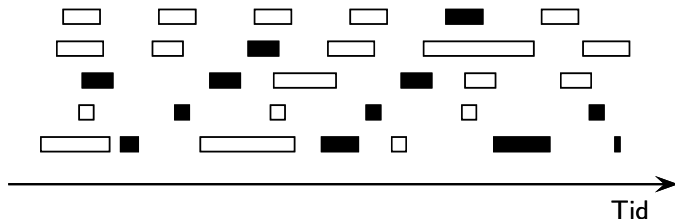
**Return**  $S$

Mere præcist kræver metoden en **definition** af “det bedste valg lige nu” (også kaldet “det grådige valg”), samt et **bevis** for at gentagen brug af dette ender med en **optimal** løsning.

# Eksempel: et simpelt skeduleringsproblem

**Input:** en samling booking-ønsker for en ressource, hver med en starttid og sluttid.

**Output:** en størst mulig mængde ikke-overlappende bookings.



Her er 12 ikke-overlappende booking-ønsker.

Er 12 det maksimale antal for dette input?

Ja, men det er måske ikke nemt at se. Der er brug for en algoritme til at finde det maksimale antal. Vi forsøger med den grådige metode.

# Eksempel: et simpelt skeduleringsproblem

Opgave: lav en definition af “grådigt valg”.

Observation: En aktivitet  $x$ , som har overlap med de allerede valgte aktiviteter i  $S$ , kan naturligvis ikke vælges.

Forskellige forslag til at vælge blandt de tilbageværende aktiviteter uden overlap:

- ▶ Den aktivitet, der er kortest.
- ▶ Den aktivitet, der overlapper færrest andre (tilbageværende) aktiviteter.
- ▶ Den aktivitet, der starter først.
- ▶ Den aktivitet, der slutter først.

For de tre første forslag ovenfor kan man finde eksempler på input, hvor disse valg ikke ender i en globalt optimal løsning (gøres til øvelserne).

Vi beviser nu, at det fjerde forslag virker (dvs. ender i en optimal løsning for alle input).

# Eksempel: et simpelt skeduleringsproblem

Grådigt valg: den som **slutter først** (blandt de tilbageværende uden overlap med allerede valgte). Som kode:

Sorter aktiviteter efter **stigende sluttid**

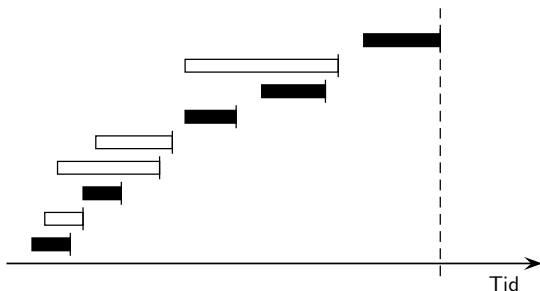
**For** hver aktivitet  $a$  taget i den rækkefølge:

**If**  $a$  overlapper allerede valgte aktiviteter:

        Skip  $a$

**Else**

        Vælg  $a$



# Analyse

Vi vil vise følgende invariant:

Der findes en optimal løsning  $OPT$  som indeholder de af algoritmen indtil nu valgte aktiviteter.

Når algoritmen er færdig, følger korrekthed af ovenstående invariant:

Algoritmens valgte aktiviteter ligger inden i en optimal løsning  $OPT$ . Pga. algoritmens virkemåde vil alle ikke-valgte aktiviteter overlappe en af de valgte. Altså kan algoritmens løsning ikke udvides og stadig være en løsning. Specielt kan  $OPT$  ikke være større end algoritmens valgte løsning, som derfor er lig med  $OPT$ .

# Analyse

Bevis for invariant ved induktion:

**Basis:**

Klart før første iteration af **for**-løkken (da ingen aktiviteter er valgt).

**Skridt:**

Lad OPT være den optimale løsning fra induktionsudsagnet før iterationen. Vi skal vise at der findes en optimal løsning OPT' i induktionsudsagnet efter iterationen.

**If-case:** Her vælger algoritmen intet nyt, så OPT kan bruges som OPT'.

# Analyse

## Else-case:

Se på aktiviteterne sorteret efter stigende sluttider:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Lad  $a_i$  være algoritmens senest valgte aktivitet og lad  $a_j$  være aktiviteten, som vælges i denne iteration.

Pga. invarianten indeholder OPT  $a_i$ . I OPT kan  $a_i$  ikke være den sidste (for så kunne OPT udvides med  $a_j$ ). Lad  $a_k$  være den næste i OPT efter  $a_i$ . Da  $a_j$  er den første aktivitet (i ovenstående sortering) efter  $a_i$  som ikke overlapper  $a_i$ , må  $j \leq k$ .

Hvis  $j = k$  kan OPT bruges som OPT'. Ellers skifter vi  $a_j$  i OPT ud med  $a_k$ . Dette giver ikke overlap med andre aktiviteter i OPT (de stopper enten før  $a_i$  eller stopper efter  $a_k$  - i sidste tilfælde må de starte efter  $a_k$  og dermed efter  $a_j$ ) og bevarer størrelsen. Vi har derfor efter udskiftningen en ny optimal løsning OPT' som opfylder invarianten.

[NB: I første iteration findes  $a_i$  ikke, men vi kan sætte  $j = 1$  og sige noget tilsvarende.] □

Køretid: Sortering +  $O(n)$ .



# Rygsæksproblemet

Rygsæk som kan bære  $W$  kg.

Ting med værdi og vægt.

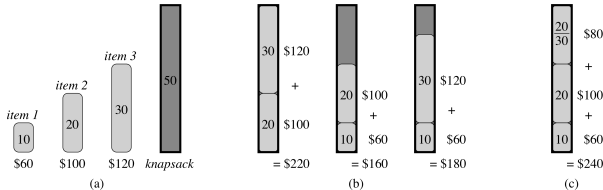
Ting nr. $i$	1	2	3	4	5	6	7
Vægt $w_i$	4	6	2	15	7	4	5
Værdi $v_i$	45	32	12	50	23	9	15

Mål: tag mest mulig værdi med uden at overskride vægtgrænsen.

# Rygsæksproblemet

“Fractional” version af problemet (dele af ting kan medtages i rygsækken) kan løses med en grådig algoritme: vælg tingene efter aftagende “nyttefylde” = værdi/vægt. Et simpelt udskiftningsargument viser, at den optimale løsning kun kan være som den af algoritmen valgte.

NB: Denne grådige algoritme virker IKKE for 0-1 versionen af problemet (hvor kun hele ting kan medtages):



Eksempel på at “grådige valg” ikke bare kan antages at virke for alle problemer (lokal optimering giver ikke altid global optimering).

# Bitmønstre

011010110001100101011011...

Bitmønstre skal *fortolkes* for at have en betydning:

- ▶ Bogstaver
- ▶ Tal (heltal, kommatal)
- ▶ Computerinstruktion (program)
- ▶ Pixels (billedfil)
- ▶ Amplitude (lydfil)
- ▶ ⋮

Fokus i dag: bogstaver (og andre tegn).

# Repræsentation af tegn

En klassisk repræsentation: ASCII.

```
⋮  
a: 1100001  
b: 1100010  
c: 1100011  
d: 1100100  
⋮
```

Alle tegn fylder 7 bits (fixed-width codes).

# Huffman-koder

Er fixed-width kodning den kortest mulige repræsentation af en fil af tegn?

Det kommer an på filens indhold! Eksempel:

	a	b	c	d	e	f
Frequency (in thousands)	45	13	12	16	9	5
Fixed-length codeword	000	001	010	011	100	101
Variable-length codeword	0	101	100	111	1101	1100

Fixed-width version:

$$3 \cdot (45.000 + 13.000 + \dots + 5.000) = 300.000 \text{ bits}$$

Variable-width version:

$$1 \cdot 45.000 + 3 \cdot 13.000 + \dots + 4 \cdot 5.000 = 224.000 \text{ bits}$$

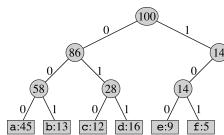
Ønske: kort(est mulig?) repræsentation af en fil. Sparer plads på disk, tid på transport over netværk.

# Prefix-kode = træer

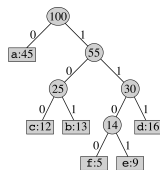
Kodeord = sti i binært træ: 0 ~ gå til venstre, 1 ~ gå til højre

**Prefix-fri kode:** ingen kode for et tegn er starten (prefix) af koden for et andet tegn ( $\Rightarrow$  dekodning utvetydig). Så tegn svarer til knuder med nul børn (blade).

	a	b	c	d	e	f
Frequency (in thousands)	45	13	12	16	9	5
Fixed-length codeword	000	001	010	011	100	101
Variable-length codeword	0	101	100	111	1101	1100



(a)



(b)

For en givet fil (tegn og deres frekvenser), find bedste variable-width prefix-kode. Dvs.  $\text{for Cost}(\text{tree}) = |\text{kodet fil}|$ , find træ med lavest cost.

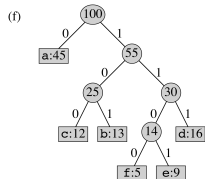
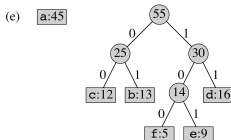
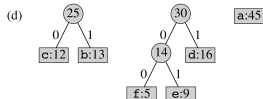
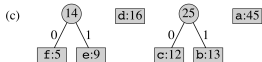
Optimale træer kan ikke have knuder med kun ét barn (alle tegn i undertræet for en sådan knude kan forkortes med en bit, jvf. (a) ovenfor). Så kun knuder med to eller nul børn findes.

# Huffmans algoritme

[David Huffman, 1952]

Byg op nedefra (fra mindste til største frekvenser) ved hele tiden at lave flg. “grådige valg”: slå de to deltræer med de to mindste samlede frekvenser sammen:

(a) f:5 e:9 c:12 b:13 d:16 a:45



# Køretid

Givet en tabel med  $n$  tegn og deres frekvenser laver Huffmans algoritme

- ▶  $n - 1$  iterationer.

(Der er  $n$  træer til start, ét træ til slut, og hver iteration mindsker antallet med præcis én.)

Ved at bruge en (min-)prioritetskø, f.eks. implementeret ved en heap, kan hver iteration udføres med:

- ▶ to ExtractMin-operationer
- ▶ én Insert-operation
- ▶  $O(1)$  andet arbejde.

Hver prioritetskø-operation tager  $O(\log n)$  tid.

Så samlet køretid for de  $n$  iterationer er  $O(n \log n)$ .



# Korrekthed

## Resumé:

Huffmans algoritme vedligeholder en samling træer  $F$ . Vægten af et træ er summen af hyppigheden i dets blade. I hvert skridt slår Huffman to træer med mindste vægte sammen, indtil der kun er ét træ.

Vi vil bevise følgende **invariant**:

Træerne i  $F$  kan slås sammen til et optimalt træ.

Når algoritmen stopper, indeholder  $F$  kun ét træ, som derfor ifølge invarianten må være et optimalt træ.

# Korrekthed

Vi vil bevise følgende invariant:

Træerne i  $F$  kan slås sammen til et optimalt træ.

Beviset er via induktion over antal skridt i algoritmen.

**Basis:** Ingen skridt er taget. Da består  $F$  af  $n$  træer, som hvert kun er et blad. Disse er bladene i ethvert træ, og derfor også i optimale træer, så invarianten er oplagt opfyldt.

**Induktionsskridt:** antag invarianten er opfyldt før et skridt i algoritmen, og lad os vise at den er opfyldt efter skridtet.

# Korrekthed

Lad træerne i  $F$  (før skridtet) være  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$  i stigende orden.

Mere præcist en orden, hvor der med hensyn til vægt gælder

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_k,$$

og hvor algoritmen slår  $t_1$  og  $t_2$  sammen.

Ifølge induktionsantagelsen kan træerne slås sammen til et optimalt træ.

Lad  $T$  være toppen af dette træ—dvs. et træ, hvis blade er rødderne i  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$ .

# Korrekthed

Case 1: Rødderne i  $t_1$  og  $t_2$  er søskende i  $T$ .

Her kan den nye samling træer (efter skridtet, hvor  $t_1$  og  $t_2$  slås sammen) stadig bygges sammen til det samme optimale træ nævnt i invarianten før skridtet.

Så invarianten gælder igen efter skridtet.

# Korrektthed

**Case 2:** Rødderne i  $t_1$  og  $t_2$  er *ikke* søskende i  $T$ .

Her vil vi finde et **andet** top-træ  $T'$  (dvs. en anden sammenlægning af træerne i  $F$ ), som også giver et optimalt træ, og hvor  $t_1$  og  $t_2$  er søskende. For **dette** optimale træ er vi i Case 1 og dermed færdige.

Vi finder  $T'$  ud fra  $T$  således:

Se på et blad i  $T$  af størst dybde. Da  $k \geq 2$  (ellers var Huffman algoritmen færdig), har bladet en forælder. Denne forælder har mindst ét undertræ, altså har den to (i optimale træer har ingen knuder ét undertræ, som bemærket tidligere). Dens andet undertræ må være et blad, ellers er det første blad ikke et dybeste blad.

Altså findes to blade i  $T$  som er søskende og begge er af størst dybde. Lad disse indeholde rødderne af  $t_i$  og  $t_j$ , med  $i < j$ .

## Korrektthed

Mulige situationer:

1	2	3...
$i$	$j$	
$i$		$j$
	$i$	$j$
		$i, j$

*Handling som giver  $T'$  fra  $T$ :*

Ingen (da vi er i Case 1)

Byt  $t_2$  og  $t_j$

Byt  $t_1$  og  $t_j$

Byt  $t_1$  og  $t_i$ , samt  $t_2$  og  $t_j$

For et byt af  $t_1$  og  $t_i$  gælder, at eftersom  $t_i$ 's rod mindst har samme dybde som  $t_1$ 's rod, og den samlede frekvens af  $t_i$  er mindst lige så stor som den samlede frekvens af  $t_1$ , vil der være flere tegn i filen, som får kortere kodeord, end der er tegn som får længere kodeord. Desuden er forandringerne i længde af kodeord den samme for både forlængelse og forkortelse (nemlig forskellen i dybde mellem  $t_1$  og  $t_i$ ).

Så den kodede fils længde stiger ikke ved byt af  $t_1$  og  $t_i$ , dvs. træet kan ikke blive dårlige ved byt af  $t_1$  og  $t_i$ .

Tilsvarende kan vises for et byt af  $t_1$  og  $t_j$ , og for et byt af  $t_2$  og  $t_j$ .

Da træet  $T$  før byt var optimalt, er træet  $T'$  efter byt også optimalt. Og  $t_1$  og  $t_2$  er søskende i  $T'$ , som ønsket.  $\square$