

Sortering

Sortering

Input: n tal

Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 9

Mange opgaver er hurtigere i sorterede data (tænk på ordbøger, adresselister i telefoner, ...). Dette gælder både for mennesker og for computere. Sortering er ofte en byggesten i algoritmer for andre problemer.

Sortering er en fundamental og central opgave.

Mange algoritmer er udviklet: Insertionsort, Selectionsort, Bubblesort, Mergesort, Quicksort, Heapsort, Radixsort, Countingsort, ...

Vi skal møde alle ovenstående i dette kursus.

Sortering

Kommentarer:

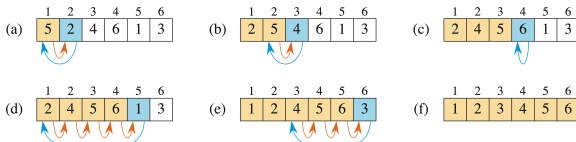
- ▶ Sorteret orden kan være stigende eller faldende. Vi vil i dette kursus altid bruge stigende (mere præcist: ikke-faldende). Skal man sortere faldende, skal alle sammenligninger bare vendes.
- ▶ Vi vil antage, at input ligger i en liste (Python) eller et array (C#/Java).
- ▶ Man sorterer ofte elementer sammensat af en sorteringsnøgle samt yderligere information. Sorteringsnøglen kan være et tal, kommatal, eller andet der kan sammenlignes (f.eks. strenge/ord). Vi viser i dette kursus blot elementer som heltal.

Insertionsort

Bruges af mange, når man sorterer en hånd i kort:



Samme idé udført på tal i en liste / et array:



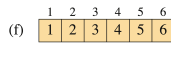
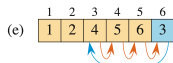
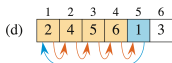
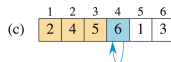
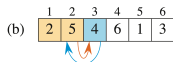
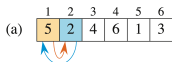
Argument for korrekthed: Den gule del af array er altid sorteret. Denne del udvides med én hele tiden (\Rightarrow algoritmen stopper, og når den stopper er alle elementer sorteret).

Insertionsort

Som pseudo-kode:

INSERTION-SORT(A, n)

```
1  for  $i = 2$  to  $n$ 
2       $key = A[i]$ 
3      // Insert  $A[i]$  into the sorted subarray  $A[1 : i - 1]$ .
4       $j = i - 1$ 
5      while  $j > 0$  and  $A[j] > key$ 
6           $A[j + 1] = A[j]$ 
7           $j = j - 1$ 
8       $A[j + 1] = key$ 
```



Analyse af køretid for Insertionsort

| INSERTION-SORT(A, n) | | <i>cost</i> | <i>times</i> |
|--------------------------|--|-------------|--------------------------|
| 1 | for $i = 2$ to n | c_1 | n |
| 2 | $key = A[i]$ | c_2 | $n - 1$ |
| 3 | // Insert $A[i]$ into the sorted subarray $A[1 : i - 1]$. | 0 | $n - 1$ |
| 4 | $j = i - 1$ | c_4 | $n - 1$ |
| 5 | while $j > 0$ and $A[j] > key$ | c_5 | $\sum_{i=2}^n t_i$ |
| 6 | $A[j + 1] = A[j]$ | c_6 | $\sum_{i=2}^n (t_i - 1)$ |
| 7 | $j = j - 1$ | c_7 | $\sum_{i=2}^n (t_i - 1)$ |
| 8 | $A[j + 1] = key$ | c_8 | $n - 1$ |

Her er t_i hvor mange gange testen i den indre **while**-løkke udføres. Dvs. $t_i - 1$ er hvor mange gange denne løkke kører (hvilket er hvor mange elementer det i 'te element skal forbi under indsættelsen). Bemærk, at $1 \leq t_i \leq i$. Sæt $c = c_1 + c_2 + \dots + c_8$.

Best case: $t_i = 1$ for alle i . Samlet tid $\leq c \cdot n$.

Worst case: $t_i = i$ for alle i . Samlet tid $\leq c \cdot n^2$, eftersom

$$\sum_{i=2}^n i \leq (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \leq \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

```
indListe = input
udListe = tom liste
while indListe ikke tom:
    find mindste element  $x$  i indListe
    flyt  $x$  fra indListe til enden af udListe
```

Klart **korrekt**, dvs. giver sorteret output (hvert element, som udtages, er mindre eller lig alle efterfølgende, der udtages).

Køretid?

I alt n gange findes mindste element i indListe.

En simpel metode til at finde mindste element er lineær søgning, som kigger én gang på hvert tilbageværende element.

Derved bliver tiden $\leq c \cdot (n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1) \leq c \cdot n^2$.

Merge

Input: To **sorterede** rækker A og B

Output: De samme elementer i én sorteret række C

Eksempel:

$$\begin{array}{l} A = 2,4,5,7,8 \\ B = 1,2,3,6 \end{array} \Rightarrow C = 1,2,2,3,4,5,6,7,8$$

Vi kan naturligvis sortere $A \cup B$.

Men det er hurtigere at **flette** (**merge**):

Repeat:

Flyt det mindste af de to forreste elementer i A og B til enden af C

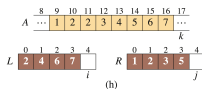
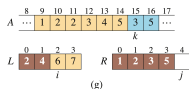
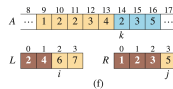
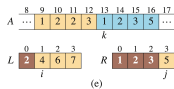
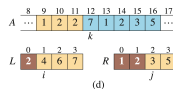
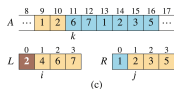
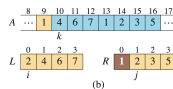
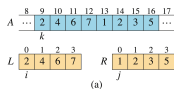
Køretid: $\leq c \cdot n$, hvor n = antal elementer i alt i A og B .

Korrekthed: Merge kan ses som en udgave af Selectionsort, der udnytter at A og B er sorterede, så den mindste i (resten af) $A \cup B$ kan findes ved kun at se på de to forreste i A og B , hvilket tager konstant tid.

Eksempel på merge

Her antages, at de to input-lister er nabodele af samme liste/array A , nemlig $A[p \dots q]$ og $A[q + 1 \dots r]$. De flyttes først over i L og R .

(Bemærk, at i bogen er $A[p \dots q]$ lig elementerne $A[p]$, $A[p + 1]$, \dots , $A[q]$, hvilket er ét element mere end næsten samme notation i Python.)



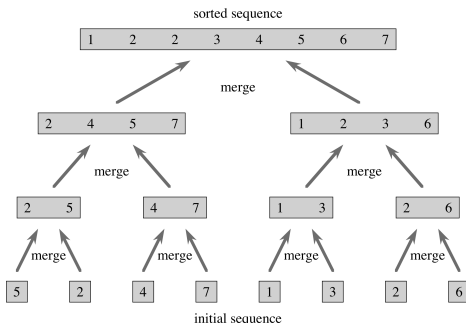
Pseudo-code for Merge

MERGE(A, p, q, r)

```
1   $n_L = q - p + 1$            // length of  $A[p : q]$ 
2   $n_R = r - q$                // length of  $A[q + 1 : r]$ 
3  let  $L[0 : n_L - 1]$  and  $R[0 : n_R - 1]$  be new arrays
4  for  $i = 0$  to  $n_L - 1$  // copy  $A[p : q]$  into  $L[0 : n_L - 1]$ 
5       $L[i] = A[p + i]$ 
6  for  $j = 0$  to  $n_R - 1$  // copy  $A[q + 1 : r]$  into  $R[0 : n_R - 1]$ 
7       $R[j] = A[q + j + 1]$ 
8   $i = 0$                      //  $i$  indexes the smallest remaining element in  $L$ 
9   $j = 0$                      //  $j$  indexes the smallest remaining element in  $R$ 
10  $k = p$                      //  $k$  indexes the location in  $A$  to fill
11 // As long as each of the arrays  $L$  and  $R$  contains an unmerged element,
12 // copy the smallest unmerged element back into  $A[p : r]$ .
13 while  $i < n_L$  and  $j < n_R$ 
14     if  $L[i] \leq R[j]$ 
15          $A[k] = L[i]$ 
16          $i = i + 1$ 
17     else  $A[k] = R[j]$ 
18          $j = j + 1$ 
19      $k = k + 1$ 
20 // Having gone through one of  $L$  and  $R$  entirely, copy the
21 // remainder of the other to the end of  $A[p : r]$ .
22 while  $i < n_L$ 
23      $A[k] = L[i]$ 
24      $i = i + 1$ 
25      $k = k + 1$ 
26 while  $j < n_R$ 
27      $A[k] = R[j]$ 
28      $j = j + 1$ 
29      $k = k + 1$ 
```

Mergesort

Mergesort: opbyg længere og længere sorterede dele af input ved gentagen brug af merge:

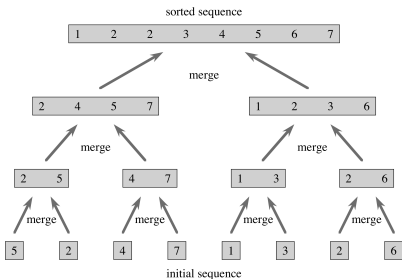


Tid: Hver merge bruger højst $c \cdot n_1$ tid, hvor n_1 er antal elementer der merges. Så alle merge-operationer i ét lag bruger tilsammen højst $c \cdot (n_1 + n_2 + \dots) = c \cdot n$. Dette gælder alle lagene. Der er i alt $\log_2 n$ lag, så den samlede tid er højst $c \cdot n \cdot \log_2 n$.

Mergesort

Hvorfor er der $\log_2 n$ merge-lag?

Antal sorterede lister efter k merge-lag (antag at n er en potens af 2):



| k | Antal lister |
|----------|--------------|
| \vdots | \vdots |
| k | $n/2^k$ |
| \vdots | \vdots |
| 3 | $n/2^3$ |
| 2 | $n/2^2$ |
| 1 | $n/2$ |
| 0 | n |

Algoritmen stopper, når der er én sorteret liste:

$$n/2^k = 1 \Leftrightarrow n = 2^k \Leftrightarrow \log_2 n = k$$

Mergesort hvis n ikke er en potens af 2?

Algoritmen merger i hvert lag så mange par, den kan, og der bliver evt. én liste, som ikke merges (denne er med som liste på næste lag).

F.eks. bliver 12 lister til $12/2 = 6$ lister mens 13 ($= 12 + 1$) lister bliver til $12/2 + 1 = 6 + 1 = 7$ lister.

Generelt: Hvis der er x lister før et merge-lag, er der $\lceil x/2 \rceil$ lister efter.

Se på to input størrelse n og n' , med $n \leq n'$. Da $\lceil x/2 \rceil$ er en voksende funktion af x , kan antallet af lister i hvert lag ikke være mindre for n' end for n . Derfor kan antallet af lag (før algoritmen når ned på én liste) ikke være mindre for n' end for n .

Sæt n' til mindste potens af to, som er større end eller lig n . Der er præcis $\log_2 n'$ lag for n' , og dermed højst så mange lag for n .

Omvendt er det nemt at se, at for $n = 2^k + 1$ er der $k + 1 = \lceil \log_2 n \rceil$ lag. Så der er $\lceil \log_2 n \rceil$ lag for generelt n .

| n | 7 | $8 = 2^3$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | $16 = 2^4$ | 17 |
|-------------|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|-------|
| $\log_2(n)$ | 2.807 | 3 | 3.169 | 3.321 | 3.459 | 3.584 | 3.700 | 3.807 | 3.906 | 4 | 4.087 |
| Antal lag | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |

Mergesort

Mergesort som pseudo-kode, i en variant formuleret med rekursion:

MERGE-SORT(A, p, r)

```
1  if  $p \geq r$                                 // zero or one element?
2      return
3   $q = \lfloor (p + r)/2 \rfloor$                     // midpoint of  $A[p:r]$ 
4  MERGE-SORT( $A, p, q$ )                        // recursively sort  $A[p:q]$ 
5  MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ )                    // recursively sort  $A[q + 1:r]$ 
6  // Merge  $A[p:q]$  and  $A[q + 1:r]$  into  $A[p:r]$ .
7  MERGE( $A, p, q, r$ )
```

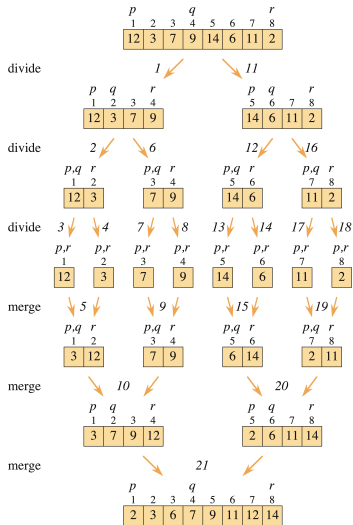
Et kald MERGE-SORT(A, p, r) har til opgave at stille elementerne i $A[p \dots r]$ i sorteret orden.

Første kald er MERGE-SORT($A, 1, n$), som har til opgave at sortere hele A .

Et kald MERGE(A, p, q, r) merger de to sorterede del-arrays/lister $A[p \dots q]$ og $A[q + 1 \dots r]$ sammen til $A[p \dots r]$.

Mergesort

Eksempel på kørsel:



Quicksort

Mergesort:

- ▶ Del input op i to dele X og Y (trivielt)
- ▶ Sorter hver del for sig (rekursion)
- ▶ Merge de to sorterede dele til én sorteret del (reelt arbejde)

Basistilfælde: $n \leq 1$ (allerede sorteret, gør intet)

Quicksort:

- ▶ Del input op i to dele X og Y så $X \leq Y$ (reelt arbejde)
- ▶ Sorter hver del for sig (rekursion)
- ▶ Returner X efterfulgt af Y (trivielt)

Basistilfælde: $n \leq 1$ (allerede sorteret, gør intet)

[Hoare, 1960]

Quicksort

Som pseudo-kode:

```
QUICKSORT( $A, p, r$ )
1  if  $p < r$ 
2      // Partition the subarray around the pivot, which ends up in  $A[q]$ .
3       $q = \text{PARTITION}(A, p, r)$ 
4      QUICKSORT( $A, p, q - 1$ ) // recursively sort the low side
5      QUICKSORT( $A, q + 1, r$ ) // recursively sort the high side
```

Et kald $\text{QUICKSORT}(A, p, r)$ har til opgave at stille elementerne i $A[p \dots r]$ i sorteret orden.

Første kald er $\text{QUICKSORT}(A, 1, n)$, som har til opgave at sortere hele A .

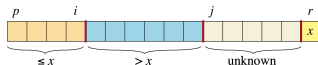
Et kald $\text{PARTITION}(A, p, r)$ vælger et element $x \in A$ og opdeler $A[p \dots r]$ således at:

$$A[q] = x \quad A[p \dots q - 1] \leq x \quad A[q + 1 \dots r] > x$$

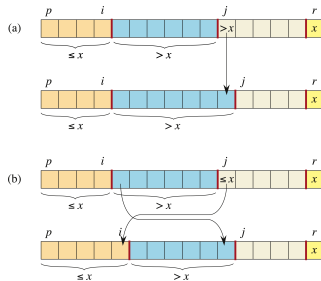
Partition

Hvordan lave PARTITION?

Idé: Vælg et element x fra input at opdele efter (her sidste element i array-del). Opbyg de to dele under et gennemløb af array ud fra flg. princip:

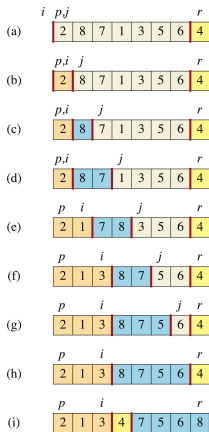


Hvordan tage et skridt under gennemløb?



Partition

Et eksempel på gennemløb:



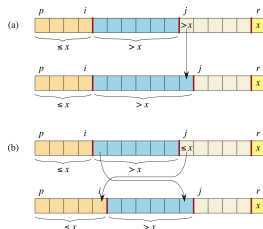
Tid: $O(n)$, hvor n er antal elementer i $A[p \dots r]$.

Partition

Som pseudo-kode:

PARTITION(A, p, r)

```
1   $x = A[r]$  // the pivot
2   $i = p - 1$  // highest index into the low side
3  for  $j = p$  to  $r - 1$  // process each element other than the pivot
4      if  $A[j] \leq x$  // does this element belong on the low side?
5           $i = i + 1$  // index of a new slot in the low side
6          exchange  $A[i]$  with  $A[j]$  // put this element there
7  exchange  $A[i + 1]$  with  $A[r]$  // pivot goes just to the right of the low side
8  return  $i + 1$  // new index of the pivot
```



Quicksort køretid

Hænger på, hvordan partitions gennem rekursionen deler input.

To ekstremer af størrelser på rekursive kald:

- ▶ Helt ubalanceret: 0 og $n - 1$
- ▶ Helt balanceret: $\lceil (n - 1)/2 \rceil$ og $\lfloor (n - 1)/2 \rfloor$
- ▶ Hvis alle partitions er helt balancerede: $O(n \log n)$ (ca. samme analyse som for Mergesort).
- ▶ Hvis alle partitions er helt ubalancerede:
 $O(n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1) = O(n^2)$.

Man kan vise at dette er henholdsvis best case og worst case for Quicksort.

Quicksort køretid

- ▶ I praksis: køretid $O(n \log n)$ for næsten alle input.
- ▶ Bemærk dog: allerede sorteret input giver køretid $\Theta(n^2)$, hvis opdelingsselement x i Partition vælges som sidste element (hvad bogen gør). Brug **ikke** det valg i praksis.
- ▶ Forslag til mere robuste valg af opdelingsselement x : enten som midterelementet, som medianen af flere elementer, som et tilfældigt element, eller som medianen af flere tilfældigt valgte elementer.
- ▶ Quicksort er *inplace*: bruger ikke mere plads end input-array'et.
- ▶ Kode er meget effektiv i praksis. En godt implementeret Quicksort er ofte bedste all-round sorteringsalgoritme (og valgt i mange biblioteker, f.eks. C#, Java og C++/STL).

Heapsort

En **Heap** er:

1. et binært træ
2. med heap-orden
3. og heap-facon
4. udlagt i et array

(Note: “heap” bruges også om et hukommelsesområde brugt til allokering af objekter under et programs udførsel. De to anvendelser er urelaterede.)

[Williams, 1964]

1) Binært træ

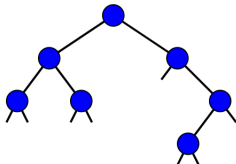
Et binært træ er enten

- ▶ det tomme træ

eller

- ▶ en knude v samt to undertræer (et højre og et venstre).

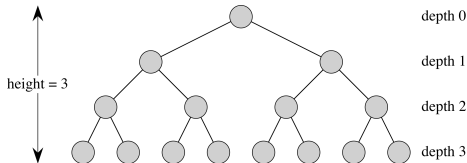
Visualisering:



Knuden v kaldes også **rod** for træet. Hvis v har et ikke-tomt undertræ, kaldes roden u af dette for et **barn** af v , og v kaldes u 's **forælder**. Hvis begge v 's undertræer er tomme, kaldes v et **blad**. Stregerne mellem børn og forældre kaldes for **kanter**. Forældre/barn-begrebet generaliserer på naturlig måde til **forfader** og **efterkommer**.

1) Binært træ

- ▶ Dybde af knude = antal kanter til rod
- ▶ Højde af knude = max antal kanter til blad
- ▶ Højde af træ = højde af dets rod
- ▶ Fuldt (complete) binært træ = træ hvor alle lag er helt fyldte.



Et fuldt binært træ af højde h har

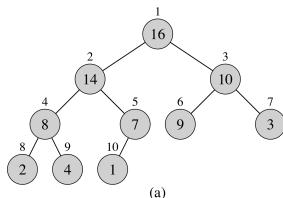
$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^h = \sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$$

knuder (formel A.6 side 1142 [formel A.5 side 1147]), heraf 2^h blade.

2) Heap-orden

Et binært træ med værdier i alle knuder er **max-heap-ordnet** hvis det for enhver knude v med barn u gælder at

$$\text{værdi i } v \geq \text{værdi i } u$$



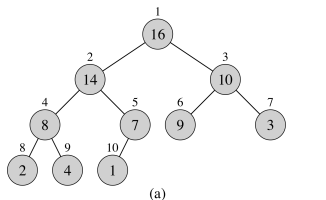
[Bemærk: en ækvivalent definition er, at det for enhver knude knude v med **efterkommer** u gælder, at værdi i $v \geq$ værdi i u .]

I et max-heap-ordnet træ vil roden indeholde den største værdi i træet.

Hvis ovenstående gælder med \leq i stedet for \geq er træet **min-heap-ordnet**.

3) Heapfacon

Et binært træ har heapfacon hvis alle lag i træet er helt fyldte, undtagen det sidste lag, hvor alle knuder findes længst til venstre. (Specielt har et fuldt træ heapfacon).



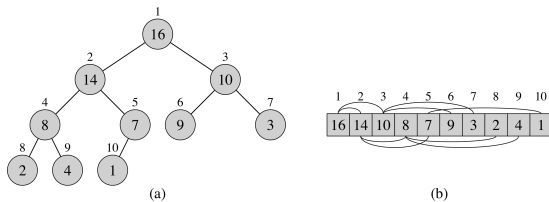
For et træ af heapfacon af højde h med n knuder:

$$n > \text{antal knuder i fuldt træ af højde } h - 1 = 2^h - 1$$

$$n > 2^h - 1 \Leftrightarrow n + 1 > 2^h \Leftrightarrow \log_2(n + 1) > h$$

4) Heap udlagt i et array

Et binært træ i heapfacon kan naturligt udlægges i et array ved at tildele array-indekser til knuder ved et top-down, venstre-til-højre gennemløb af træets lag:



Navigering mellem børn og forældre i array-versionen kan udføres ved simple beregninger: Knuden på plads i har

- ▶ sin forælder på plads $\lfloor i/2 \rfloor$
- ▶ sine børn på plads $2i$ og $2i + 1$

(Se figur ovenfor. Bevises nemt via induktion.)

Operationer på en heap

Vi ønsker at lave følgende operationer på en heap:

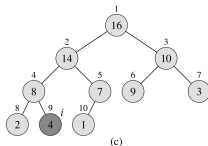
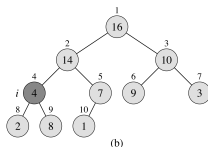
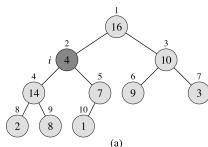
- ▶ **MAX-HEAPIFY**: Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens undertræ til at overholde heap-orden.
- ▶ **BUILD-MAX-HEAP**: Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

[Navnene ovenfor er for en max-heap. For en min-heap findes de samme operationer med “min-” i stedet for “max-” i navnet.]

Max-Heapify

Opgave: givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens værdi mindre end et eller begge børns værdier.
- Løsning: byt plads med barnet med den største værdi, kør derefter MAX-HEAPIFY på dette barn.

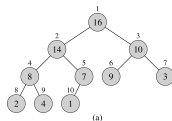


Tid: $O(\text{højde af knude})$.

Max-Heapify

Som pseudo-kode (med indarbejdet check for at man ikke kigger “for langt” i arrayet, dvs. længere end plads n):

```
MAX-HEAPIFY( $A, i, n$ )  
   $l = \text{LEFT}(i)$   
   $r = \text{RIGHT}(i)$   
  if  $l \leq n$  and  $A[l] > A[i]$   
     $largest = l$   
  else  $largest = i$   
  if  $r \leq n$  and  $A[r] > A[largest]$   
     $largest = r$   
  if  $largest \neq i$   
    exchange  $A[i]$  with  $A[largest]$   
    MAX-HEAPIFY( $A, largest, n$ )
```



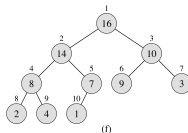
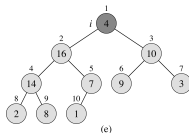
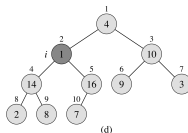
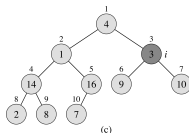
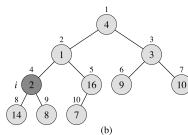
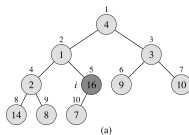
Build-Heap

Opgave: lav n (uordnede) input elementer til en heap.

- Ide: arranger elementerne i heap-facon, bring derefter træet i heap-orden nedefra og op.
- Observation: et træ af størrelse én overholder altid heaporder.

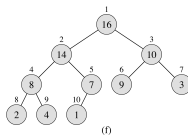
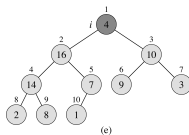
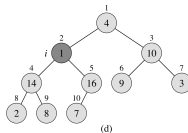
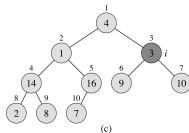
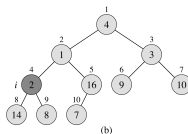
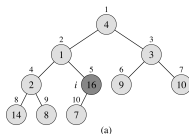
A

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|---|----|----|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7 |
|---|---|---|---|----|---|----|----|---|---|



Build-Heap

A [4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7]

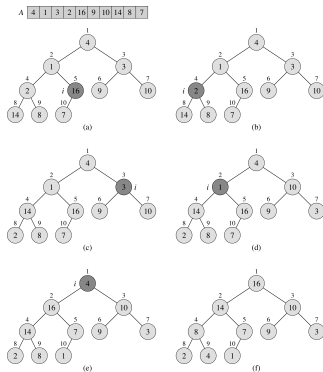


Tid: klart $O(n/2 \cdot \text{heap h\o jde}) = O(n \log_2 n)$. Bedre analyse giver $\Theta(n)$.

Build-Heap

Som pseudo-kode:

BUILD-MAX-HEAP(A, n)
 for $i = \lfloor n/2 \rfloor$ **downto** 1
 MAX-HEAPIFY(A, i, n)



Heapsort

En form for selectionsort hvor der bruges en heap til hele tiden at udtage det største tilbageværende element:

byg en heap

gentag til heap er tom:

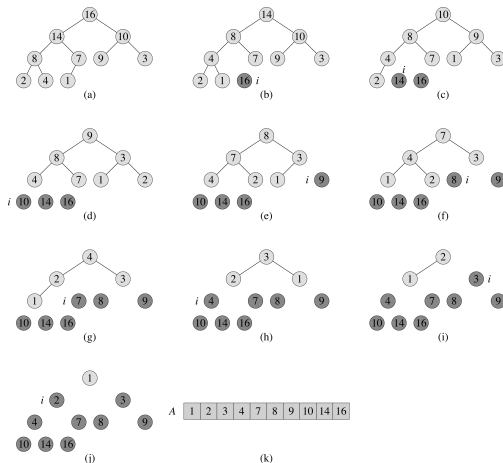
 fjern rod (som er største element i heapen)

 sæt sidste element op som ny rod

 genskab heap-struktur ved MAX-HEAPIFY på ny rod.

Heapsort

Eksempel:



Heapsort

Som pseudo-kode:

```
HEAPSORT( $A, n$ )  
  BUILD-MAX-HEAP( $A, n$ )  
  for  $i = n$  downto 2  
    exchange  $A[1]$  with  $A[i]$   
    MAX-HEAPIFY( $A, 1, i - 1$ )
```

Tid: $O(n) + O(n \log n) = O(n \log n)$

Tre $O(n \log n)$ sorteringsalgoritmer

| | Worstcase | Inplace |
|-----------|-----------|---------|
| QuickSort | | ✓ |
| MergeSort | ✓ | |
| HeapSort | ✓ | ✓ |

Heapsort kører dog langsommere end Mergesort og Quicksort pga. ineffektiv brug af hukommelse (random access).

Introsort [Musser, 1997]: brug Quicksort, men skift under rekursionen til heapsort hvis rekursionen bliver for dyb. Dette giver en inplace, worst case $O(n \log n)$ algoritme, med god køretid i praksis (dette er sorteringsalgoritmen i C# og i standardbiblioteket STL for C++).