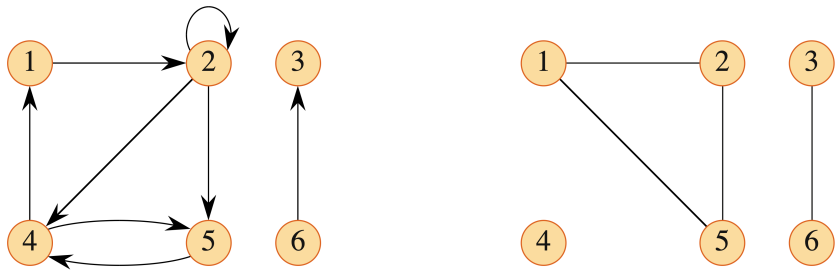
# Grafer og graf-gennemløb

# Grafer

# Grafer

En mængde $V$ af *knuder* (vertices). Ofte $V \subseteq \mathbb{N}$.

En mængde $E \in V \times V$ af *kanter* (edges). Dvs. par af knuder.



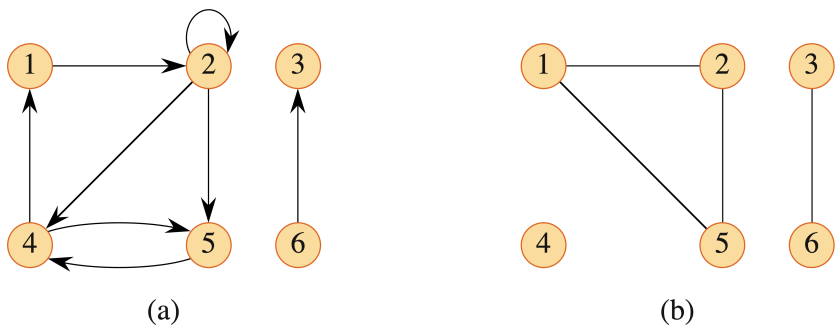

- Orienterede grafer: kanter er ordnede par (se (a) ovenfor).
- Uorienterede grafer: kanter er uordnede par (se (b) ovenfor).
- Vægtede grafer: hver kant har et tal tilknyttet (ikke vist).
- Notation: $n = |V|$, $m = |E|$.
- Bemærk at $0 \leq m \leq n^2$ for orienterede grafer og $0 \leq m \leq (n^2 + n)/2$ for uorienterede grafer.

Læs yderligere om graf-terminologi i de to første sider af appendix B.4 i lærebogen.

# Grafer

Modeller for utroligt mange ting:

- Ledningsnet (telefon, strøm, olie, vand,...).
- Vejnet (vejkryds er knuder, veje mellem kryds er kanter)
- Venner på SoMe.
- Følgere på SoMe.
- WWW-sider.
- Medforfatterskaber.



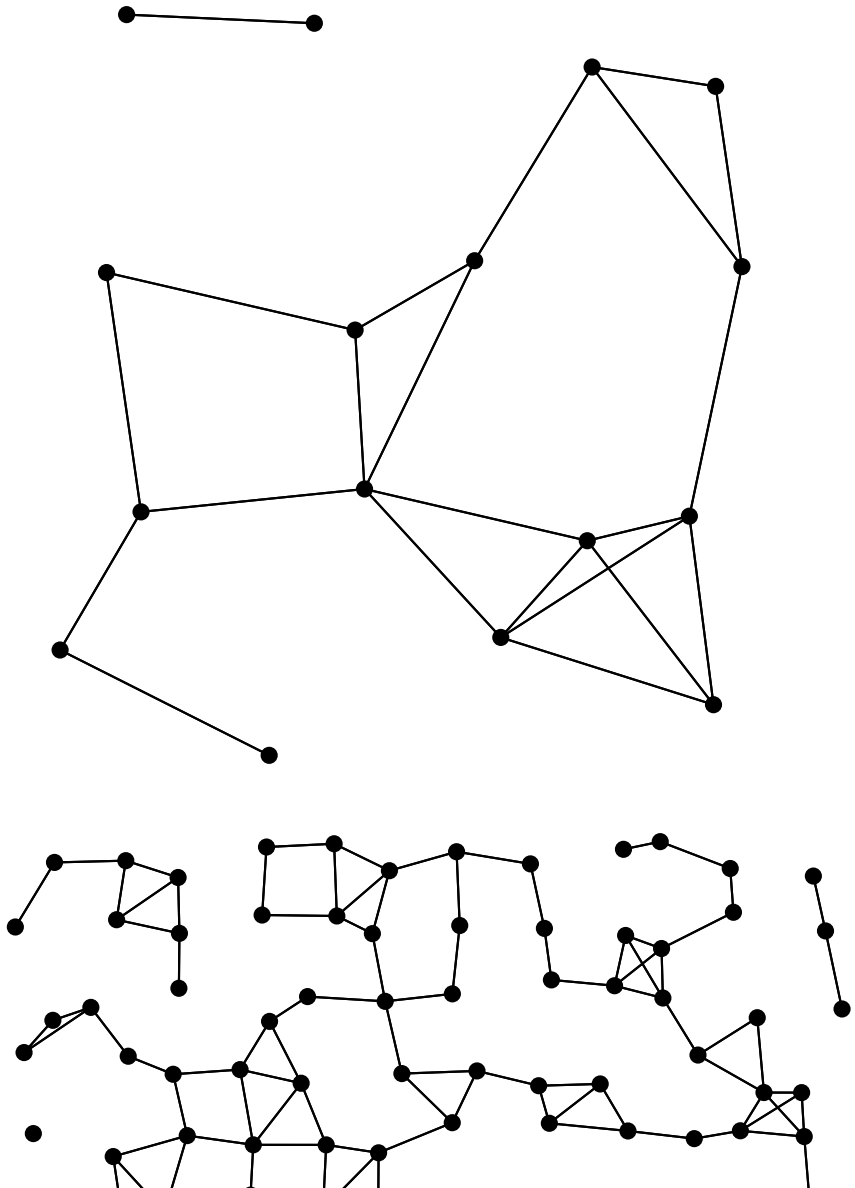
# Masser af algoritmiske spørgsmål på grafer

Nogle eksempler på algoritmiske spørgsmål på grafer:

- Hvordan repræsentere grafer på en computer (datastruktur)?
- Findes der en sti mellem to angivne knuder?
- Hvad er en korteste sti mellem to angivne knuder?
- Hvad er en mindste delmængde af kanter, som stadig holder alle knuder forbundet?
- Hvad er en største delmængde kanter, som ikke deler knuder?
- $\vdots$

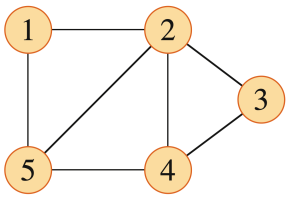
# Eksempel på algoritmisk spørgsmål

Findes der findes en sti mellem to givne knuder?

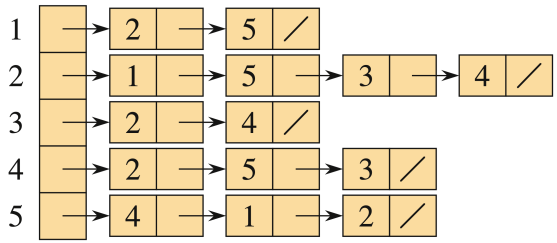


# Datastrukturer for grafer

Adjacency lists og adjacency matrix




(a)




(b)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

(c)

Adjacency lists: listen for $u$ indeholder $v$ for alle kanter $(u, v) \in E$. Knuder er repræsenteret som heltal mellem 1 og $n$ (eller 0 og $n - 1$).

Plads: $O(n + m)$ for adjacency lists, $O(n^2)$ for adjacency matrix.

Hvis ikke andet oplyses, bruges adjacency lists repræsentationen i algoritmer i dette kursus. Også lang mest udbredt i praktiske sammenhænge.

En kant i en uorienterede graf repræsenteres som to orienterede kanter (så mht. implementation er uorienterede grafer bare et specialtilfælde af orienterede grafer).

# Grafgennemløb

# Grafgennemløb

**Opgave**: Givet en graf i adjacency lists repræsentation, besøg alle knuder og kanter. Målet er, at undersøge forskellige egenskaber for grafen.

**Generel ide**: Besøg en startknude $s$. Brug derefter kanter i nabolisterne for besøgte knuder til at besøge flere knuder.

Marker knuder undervejs for at holde styr på processen:

- Hvide knuder: endnu ikke besøgt
- Grå knuder: besøgt, men ikke alle kanter i naboliste brugt
- Sorte knuder: besøgt, alle kanter i naboliste brugt

# Grafgennemløb

Generisk algoritme til grafgennemløb:

```
GenericGraphTraversal1(s)
    Gør s grå og resten af knuderne hvide
    while der findes grå knuder:
        vælg en grå knude v
        if v's naboliste er brugt op
            gør v sort
        else
            vælg en ubrugt kant (v, u) fra v's naboliste
            if u hvid:
                gør u grå
```

En knudes livs-cyklus: hvid $\rightarrow$ grå $\rightarrow$ sort. Når algoritmen stopper, er alle knuder enten hvide eller sorte.

# Grafgennemløb

Vi skal senere i kurset møde tre varianter, som har forskellige strategier for at vælge næste kant $(v, u)$ at bruge, dvs. for valgene (*):

```
GenericGraphTraversal1(s)
    Gør s grå og resten af knuderne hvide
    while der findes grå knuder:
        vælg en grå knude v (*)
        if v's naboliste er brugt op
            gør v sort
        else
            vælg en ubrugt kant (v, u) fra v's naboliste (*)
            if u hvid:
                gør u grå
```

- Breadth-First-Search (BFS)
- Depth-First-Search (DFS)
- Priority-Search (Dijkstras algoritme, A*)

# Hvor langt når vi rundt i grafen?

Vi når alt, som kan nås fra $s$:

**Sætning**: Hvis der er en sti fra $s$ til $v$, vil $v$ være sort (og dermed besøgt) når $\textsc{GenericGraphTraversal1}(s)$ stopper.

**Bevis**: Når algoritmen stopper, er alle knuder enten hvide eller sorte. Da $s$ startede grå, må den nu være sort.

Alle andre knuder startede hvide. Antages at $v$ stadig er hvid, må der være mindst én kant $(u, w)$ på stien med $u$ sort og $w$ hvid. Men $u$ kan kun være sort hvis $(u, w)$ er blevet brugt, hvorved $w$ blev grå og nu må være sort. Så antagelsen kan ikke gælde og $v$ må derfor være sort. □

# For at nå rundt i *hele* grafen:

```
GenericGraphTraversalGlobal()
    Gør alle knuder hvide
    for alle knuder s:
        if s hvid:
            GenericGraphTraversal2(s)
```

```
GenericGraphTraversal2(s)
    Gør s grå ~~og resten af knuderne hvide~~
    while der findes grå knuder:
        vælg en grå knude v (*)
        if v's naboliste er brugt op
            gør v sort
        else
            vælg en ubrugt kant (v, u) fra v's naboliste (*)
            if u hvid:
                gør u grå
```

Hvis (*) tager tid $O(1)$, er samlet køretid $O(n + m)$. [En kant kan kun vælges én gang, så alt arbejde udført i **else**-del tager $O(m)$ tid i alt. Resten tager $O(n)$ tid i alt.]

# Hvor langt når vi rundt i grafen per kald?

**Sætning**: Hvis der ved starten af et kald til $\textsc{GenericGraphTraversal2}(s)$ er en sti fra $s$ til $v$ bestående af hvide knuder (inkl. $v$), vil $v$ være sort (og dermed besøgt) når $\textsc{GenericGraphTraversal2}(s)$ stopper.

**Bevis**: Observer, at før og efter hvert kald til $\textsc{GenericGraphTraversal2}(s)$ er alle knuder enten hvide eller sorte. Derfor kan det samme bevis som for $\textsc{GenericGraphTraversal1}(s)$ bruges. □

# Husk hvem der opdagede hvem:

Når en knude $u$ ($\neq s$) besøges første gang, gemmer den i variablen $u.\pi$ knuden, som opdagede $u$ (kaldet $u$'s predecessor). Bemærk, at $u.\pi$ højst bliver sat én gang (efter initialisering til NIL), da $u$ gøres grå samtidig.

```
GenericGraphTraversalGlobalWithParents()
    Gør alle knuder hvide og sæt deres π til NIL
    for alle knuder s:
        if s hvid:
            GenericGraphTraversal3(s)
```

```
GenericGraphTraversal3(s)
    Gør s grå
    while der findes grå knuder:
        vælg en grå knude v (*)
        if v's naboliste er brugt op
            gør v sort
        else
            vælg en ubrugt kant (v, u) fra v's naboliste (*)
            if u hvid:
                gør u grå
                sæt u.π lig v
```

# Husk hvem der opdagede hvem:

**Sætning**: De knuder, som er opdaget (gjort ikke-hvide) i et kald GenericGraphTraversal3($s$), udgør et træ med $s$ som rod og $\pi$ i opdagede knuder som parent pointers. For hver sti fra en knude $v$ til roden i træet findes den samme sti i grafen, men i modsat retning (fra $s$ til $v$).

**Bevis**: Det er nemt at se, at dette udsagn er en invariant som vedligeholdes under kørslen af GenericGraphTraversal3($s$). □

Bemærk:

- I GenericGraphTraversalGlobalWithParents() kaldes GenericGraphTraversal3($s$) gentagne gange. Hvert kald giver ét træ.
- Træerne fra forskellige kald deler ikke knuder (en knude kommer kun med i et træ, hvis den er hvid, og bagefter er den ikke-hvid).
- Tilsammen indeholder træerne alle knuder i grafen (kun hvide knuder er ikke med i et træ, men alle knuder er sorte til sidst).

# BFS

# Bredde-Først-Søgning (BFS)

Strategi: Hold de grå knuder i en KØ, brug nabolister op med det samme.

Tilføj også en variabel $v.d$ til alle knuder $v$ (d for distance.)

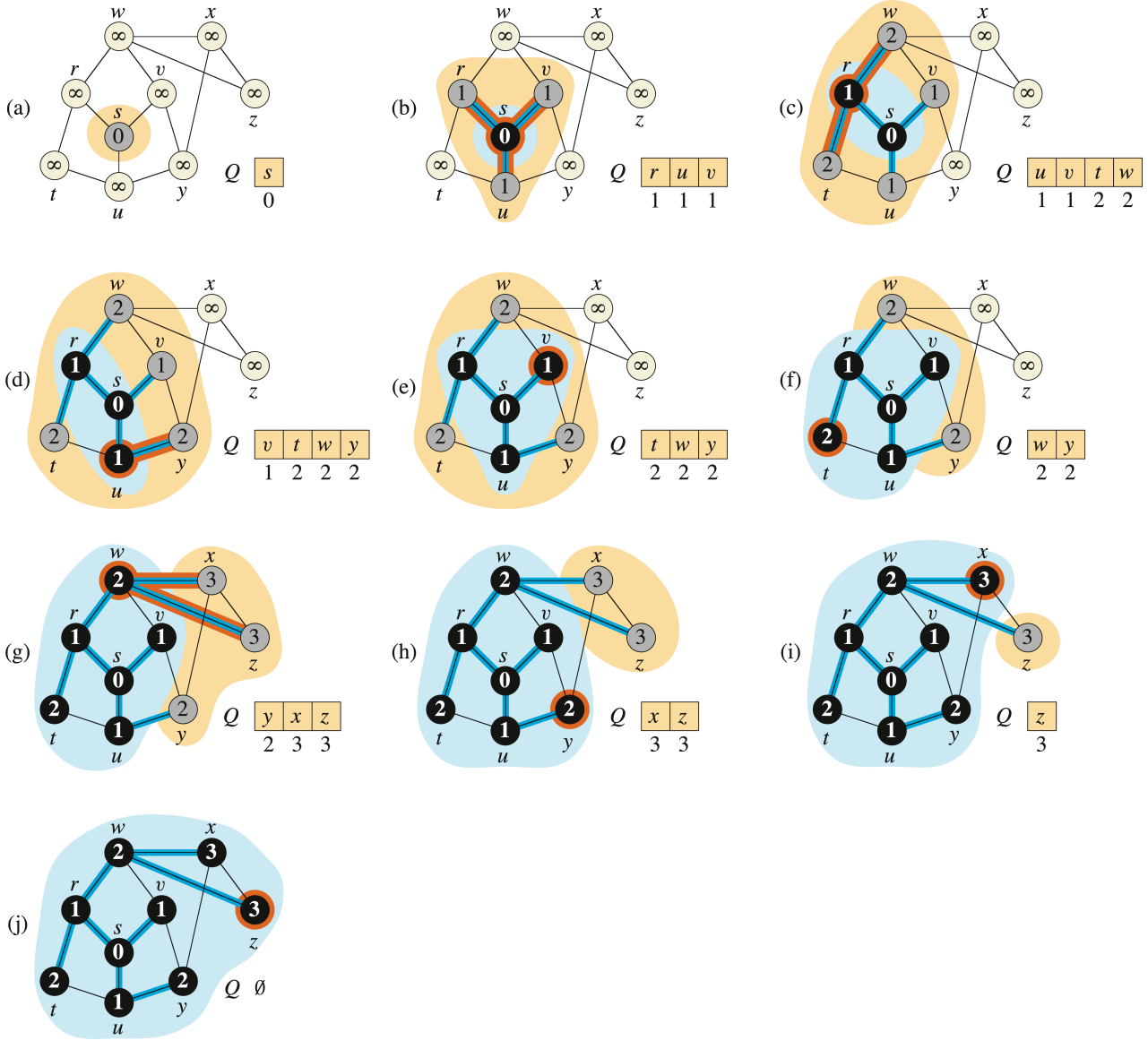
Mest brugt er versionen uden GLOBAL-del (for BFS er vi ofte mere interesserede i ét bestemt $s$ fremfor at komme hele grafen rundt):

```
BFS(G, s)
 1  for each vertex u ∈ G.V − {s}
 2      u.color = WHITE
 3      u.d = ∞
 4      u.π = NIL
 5  s.color = GRAY
 6  s.d = 0
 7  s.π = NIL
 8  Q = ∅
 9  ENQUEUE(Q, s)
10  while Q ≠ ∅
11      u = DEQUEUE(Q)
12      for each v ∈ G.Adj[u]
13          if v.color == WHITE
14              v.color = GRAY
15              v.d = u.d + 1
16              v.π = u
17              ENQUEUE(Q, v)
18      u.color = BLACK
```

Invariant:
kø = alle grå knuder.

# Bredde-Først-Søgning (BFS)

Eksempel:



# Bredde-Først-Søgning (BFS)

For BFS kan sætningen om $\textsc{GenericGraphTraversal3}(s)$ udvides til også at sige noget om værdierne af $v.d$:

**Sætning**: De knuder, som er opdaget (gjort ikke-hvide) i et kald $\textsc{GenericGraphTraversal3}(s)$, udgør et træ med $s$ som rod og $\pi$ i opdagede knuder som parent pointers. For hver sti fra en knude $v$ til roden i træet findes den samme sti i grafen, men i modsat retning (fra $s$ til $v$) og $v.d$ er lig antal kanter på denne sti.

**Bevis**: Det er nemt at se, at dette udsagn er en invariant som vedligeholdes under kørslen af $\mathrm{BFS}(G, s)$. □

Bemærk, at $v.d$ højst bliver sat én gang (efter initialisering til $\infty$): $v.d$ sættes kun, når $v$ er hvid, og $v$ gøres ikke-hvid samtidig med at $v.d$ sættes.

Bemærk også, at de ikke-hvide knuder er dem, hvor $v.d \neq \infty$ (dvs. dette er en invariant).

# Egenskaber for BFS

Køretid: $O(n+m)$.

Beviset er det samme som under GenericGraphTraversalGlobal, da valgene (*) i BFS tager $O(1)$ tid. I BFS bruger man som sagt ofte kun at kalde på én startknude $s$, dvs. uden at bruge Global-delen. Men køretiden kan kun falde ved dette.

**Definition**: Vi definerer $\delta(s,v)$ som længden af en korteste sti, *målt i antal kanter*, fra startknuden $s$ til knuden $v$. Findes ingen sti, defineres $\delta(s,v) = \infty$.

> **Sætning**: Når BFS stopper, gælder $v.d = \delta(s,v)$ for alle knuder.

Dvs. BFS kan finde korteste veje (målt i antal kanter) fra $s$ til alle $v$.

# Bevis for sætning

De mulige værdier for $\delta(s, v)$ er $0, 1, 2, 3, \ldots$ samt $\infty$.

For knuder $v$ med $\delta(s, v) = \infty$ findes der ikke en sti fra $s$ til $v$. Så kan $v$ ikke være opdaget (som vist tidligere er der en sti i grafen fra $s$ til alle opdagede knuder). Derfor kan værdien $v.d = \infty$ sat under initialisering ikke ændres, så når BFS stopper, gælder $v.d = \delta(s, v)$ for disse knuder.

For resten af knuderne er $\delta(s, v) = i < \infty$. For dem viser vi, via induktion på $i$, at

$$\delta(s, v) = i$$

$$\Downarrow$$

$$v.d = \delta(s, v) \text{ når BFS stopper}$$

Tilsammen giver dette sætningen.

# Observationer

1. Pga. virkemåden for en kø vil BFS-algoritmen for $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ udtage alle knuder med $d$-værdi lig $i$ mens den indsætter alle knuder med $d$-værdi lig $i + 1$ (og derefter fortsætter den med næste værdi for $i$).

   Heraf ses, at $d$-værdierne for de udtagne knuder stiger monotont.
2. Vi ved allerede at $\delta(s, v) \leq v.d$, eftersom vi tidligere har vist, at der er en sti af længde $v.d$ i grafen, når $v.d < \infty$ (dvs. når $v$ er ikke-hvid), og eftersom udsagnet er klart, når $v.d = \infty$

# Induktionsbevis

**Basis** ($i = 0$): Hvis $\delta(s, v) = 0$ er $v = s$. BSF sætter $s.d = 0$.

**Induktionssskridt** ($i > 0$):

Vi antager, at $\delta(s, v) = i - 1 \Rightarrow v.d = \delta(s, v)$, og skal vise at $\delta(s, v) = i \Rightarrow v.d = \delta(s, v)$.

Hvis $\delta(s, v) = i$, eksisterer en sti fra $s$ til $v$ af længde $i$. For næstsidste knude $u$ på denne sti gælder $\delta(s, u) = i - 1$ (hvis $u$ havde en kortere vej, ville $v$ også have det).

Fra induktionsantagelsen har vi $u.d = \delta(s, u)$. Da $u$ blev taget ud af køen, var $v$ (en nabo til $u$) *enten* uopdaget (hvid) og bliver nu opdaget af $u$, *eller* $v$ var allerede opdaget fra en knude $t$, som derfor allerede var taget ud af køen og derfor (via observation 1) har $t.d \leq u.d$.

I BFS tildeles $v$ en $d$-værdi, som er én større end $d$-værdien af knuden, som opdager den.

Så hvad enten $v$ bliver optaget af $u$ eller $v$, bliver $v.d$ derfor sat til *højst* $u.d + 1 = \delta(s, u) + 1 = (i - 1) + 1 = i = \delta(s, v)$. Vi ved (via observation 2) at $v.d$ er *mindst* $\delta(s, v)$. I alt har vi $v.d = \delta(s, v)$. □

# DFS

# Dybde-Først-Søgning (DFS)

Strategi: Hold de grå knuder i en STAK, avancer minimalt i nabolisten hver gang vi kigger på en knude.

Stakken er implicit i den rekursive formulering nedenfor (dvs. er lig rekursionsstakken), men kan også kodes eksplicit. Mere præcist: elementerne på stakken er de grå knuder, hver med en delvist gennemløbet naboliste, nemlig gennemløbet i for-løkken i DFS-VISIT. [Bemærk: koden til venstre svarer til GLOBAL-delen i terminologien fra tidligere.]

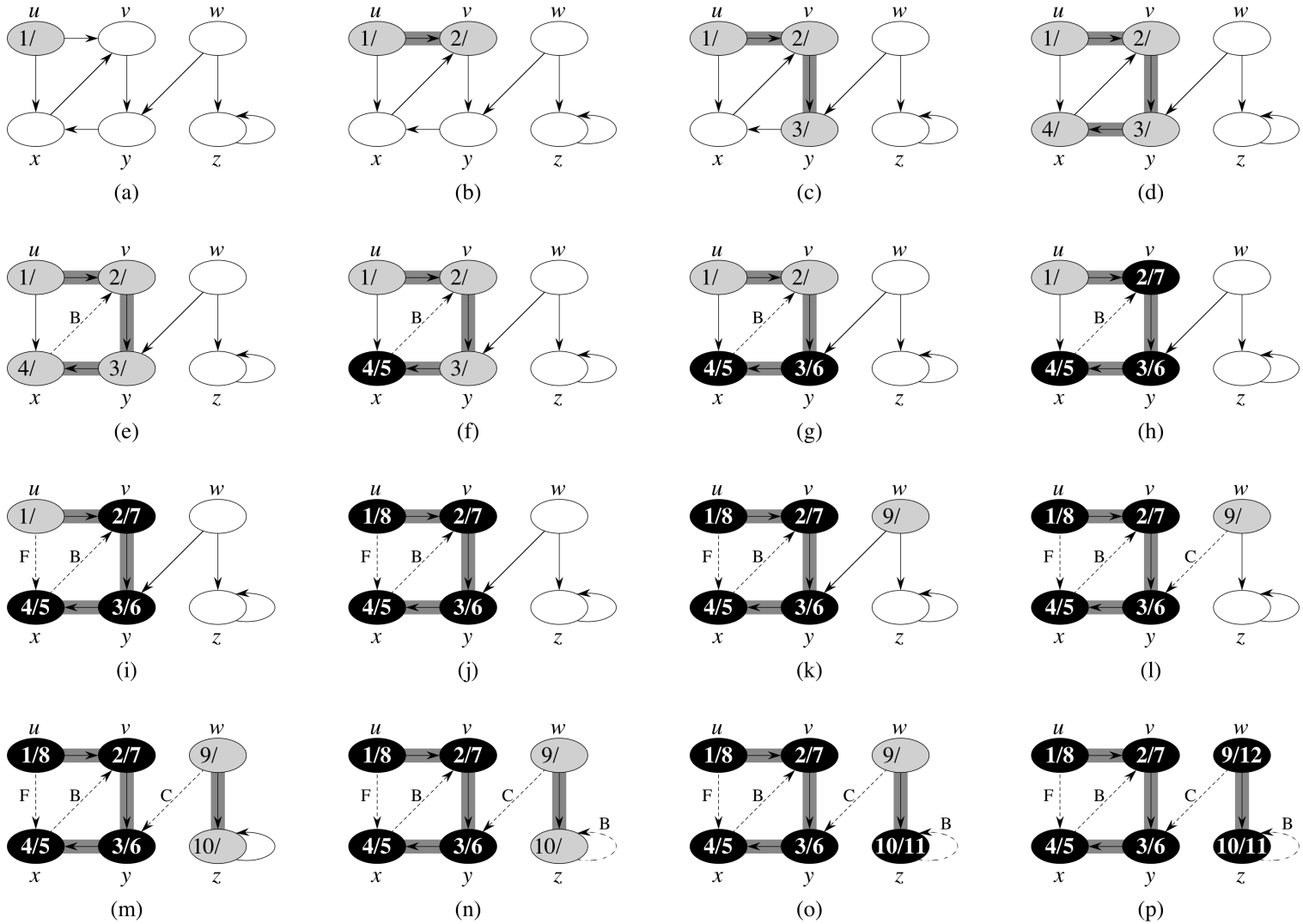
DFS tilføjer også timestamps $u.d$ for "discovery" (hvid $\rightarrow$ grå) og $u.f$ for "finish" (grå $\rightarrow$ sort) til alle knuder $u$. [$u.d$ er *ikke* "distance" i DFS.]

```
DFS(G)
1  for each vertex u ∈ G.V
2      u.color = WHITE
3      u.π = NIL
4  time = 0
5  for each vertex u ∈ G.V
6      if u.color == WHITE
7          DFS-VISIT(G, u)
```

```
DFS-VISIT(G, u)
1  time = time + 1          // white vertex u has just been discovered
2  u.d = time
3  u.color = GRAY
4  for each v ∈ G.Adj[u]    // explore edge (u, v)
5      if v.color == WHITE
6          v.π = u
7          DFS-VISIT(G, v)
8  u.color = BLACK          // blacken u; it is finished
9  time = time + 1
10 u.f = time
```

# Dybde-Først-Søgning (DFS)

Eksempel:



# Egenskaber

Køretid: $O(n+m)$.

Beviset er det samme som under GenericGraphTraversalGlobal, da valgene (*) i DFS tager $O(1)$ tid.

Observér:

- Discovery (hvid $\rightarrow$ grå) af $v$ = sæt $v.d$ = kald af DFS-Visit på $v$ = PUSH af $v$ på stakken.
- Finish (grå $\rightarrow$ sort) af $v$ = sæt $v.f$ = retur fra kald af DFS-Visit på $v$ = POP af $v$ fra stakken.

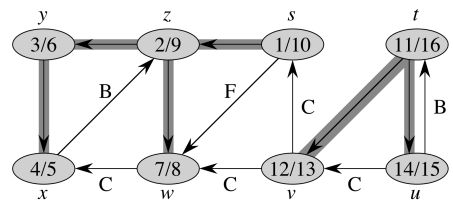
Værdien $v.\pi$ sættes ved kald af DFS-Visit på $v$. Af dette, samt ovenstående, følger at:

- Kanterne $(v.\pi, v)$ udgør præcis rekursionstræerne for DFS-Visit (ét træ for hvert kald fra DFS).
- Intervallet $[v.d, v.f]$ er den periode $v$ er på stakken.
- Knuden $v$ er grå hvis og kun hvis den er på stakken.

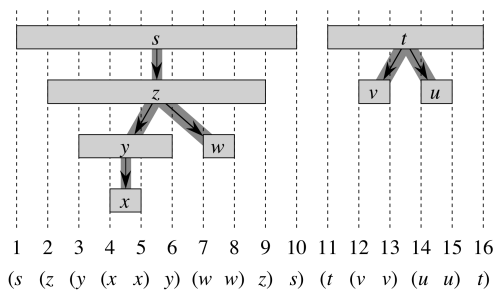
# Egenskaber

Af måden en stak virker: Hvis to knuder $u$ og $v$ på et tidpunkt er på stakken samtidig, og $v$ er øverst, må $v$ poppes før $u$ kan poppes.

Intervallet $[v.d, v.f]$ er den periode $v$ er på stakken. Det følger derfor, at for alle par af knuder $u$ og $v$ må intervallerne $[u.d, u.f]$ og $[v.d, v.f]$ *enten* være disjunkte ($u$ og $v$ var aldrig på stakken samtidig) *eller* det ene interval må være helt indeholdt i den andet ($u$ og $v$ var på stakken samtidig, knuden med det største interval kom på først).



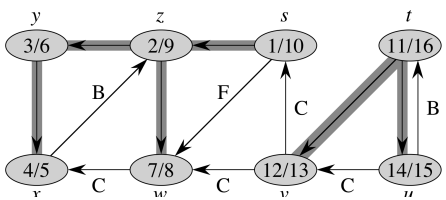

Discovery- og finish-tider er derfor nestede som parenteser er det.

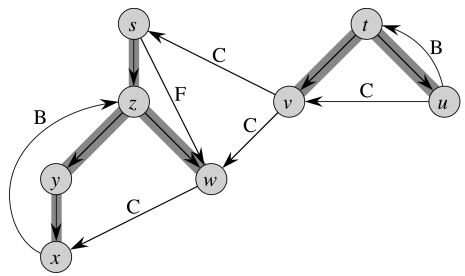


# Egenskaber

Når en kant $(u, v)$ undersøges fra $u$ (hvilket betyder, at $u$ er øverst på stak) haves flg. cases:

1. *tree-kanter:* $v$ hvid.
2. *back-kanter:* $v$ er grå (er på stak).
3. *forward-kanter:* $v$ er sort (den er ikke længere på stak, men har været det sammen med $u$).
4. *cross-kanter:* $v$ er sort (den er ikke længere på stak, og har ikke været det sammen med $u$).



# Egenskaber

I lidt større detalje:

Når en kant $(u, v)$ undersøges fra $u$ haves flg. cases:

1. *tree-kanter:* $v$ hvid. Her er $u.d < v.d = \text{nu} < v.f < u.f$.
2. *back-kanter:* $v$ er grå (er på stak – det må være under $u$, som er toppen af stakken (evt. $u = v$ hvis self-loop)). Her er $v.d \leq u.d \leq \text{nu} < u.f \leq v.f$.
3. *forward-kanter:* $v$ er sort (den er ikke længere på stak, men har været det sammen med $u$). Her er $u.d < v.d < v.f \leq \text{nu} < u.f$.
4. *cross-kanter:* $v$ er sort (den er ikke længere på stak, og har ikke været det sammen med $u$). Her er $v.d < v.f < u.d \leq \text{nu} < u.f$.

Bemærk, at disse cases kan genkendes, når en kant undersøges under DFS, nemlig via hvid/grå/sort-farvningen samt (for case 3 og 4) $d$-værdierne i kantens to knuder (og vi ser ovenfor, at disse $d$-værdier *er* blevet sat, når kanten undersøges).

# Egenskaber

For *uorienterede grafer* er der kun tree-kanter og back-kanter (såfremt en kant kategoriseres, første gang den undersøges fra én af dens ender).

Dette følger af, at $u$ allerede må være blevet undersøgt fra $v$ hvis $v$ er sort (hele nabolisten er gennemløbet) og kanten $(v, u)$ må derfor allerede være kategoriseret. Derved kan case 3 og 4 ikke opstå.

1. *tree-kanter:* $v$ hvid.
2. *back-kanter:* $v$ er grå (er på stak).
3. *forward-kanter:* $v$ er sort (den er ikke længere på stak, men har været det sammen med $u$).
4. *cross-kanter:* $v$ er sort (den er ikke længere på stak, og har ikke været det sammen med $u$).

# Hvid-sti lemma

**Hvid-sti lemma**:

> Hvis findes en sti af hvide knuder (inkl. $w$) fra $u$ til $w$ til tid $u.d$, da gælder $u.d < w.d < w.f < u.f$.

**Bevis**:

Da stien er hvid til tid $u.d$, gælder $u.d \leq v.d$ for alle knuder $v$ på stien. Af parentesstrukturen for $d$- og $f$-tider gælder så enten 1) $u.d \leq v.d < v.f \leq u.f$ eller 2) $u.d < u.f < v.d < v.f$.

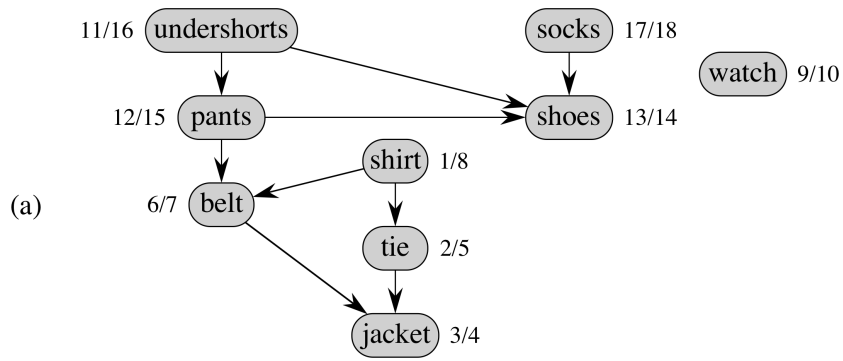
Antag, at 2) forekommer, og lad $y$ være den første knude på stien, som opfylder 2) med $y$ indsat på $v$'s plads. Da har $y$ en forgænger $x$, som opfylder 1) med $x$ indsat på $v$'s plads [evt. er $x$ lig $u$, som jo opfylder 1)]. Men pga. kanten $(x, y)$ må $y$ opdages inden tid $x.f$, hvilket er i modstrid med at $y$ opfylder 2). □

# DAGs

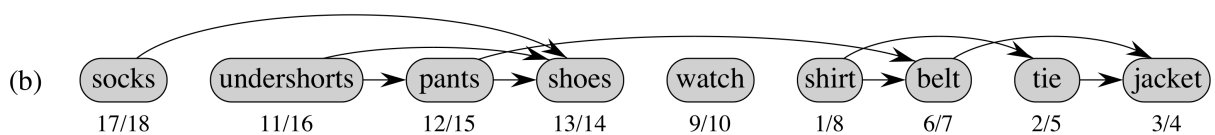
# DAGs og topologisk sortering

DAG = Directed Acyclic Graph. En orienteret graf uden kredse (cycles).

Bruges ofte til at modellere afhængigheder. Eksempel:




Topologisk sortering af en DAG: en lineær ordning af knuderne så alle kanter går fra venstre til højre.



# DAGs og topologisk sortering

**Lemma**: En orienteret graf har en kreds (cycle) $\Leftrightarrow$ der findes back-edges under et DFS-gennemløb.

**Bevis**:

$\Rightarrow$: DFS (med GLOBAL ydre loop) opdager alle knuder. Se på første knude $v$ i kredsen som bliver grå. Dvs. at til tid $v.d$ er alle andre knuder hvide.

Af hvid-sti lemmaet fås så $v.d < u.d < u.f < v.f$ for den sidste knude $u$ i kredsen (som peger på $v$), hvorved kanten $(u, v)$ erklæres en backedge ($v$ er grå, når denne kant undersøges).

$\Leftarrow$: Når en back-edge findes: Der er en kreds af nul eller flere trækanter (mellem knuder, som lige nu er på stakken) og én back-kant.

# DAGs og topologisk sortering

**Lemma**: For en kant $(u, v)$ gælder $u.f \leq v.f \Leftrightarrow$ kanten er en back-edge.

**Bevis**: Check de fire cases for kanter (tree, back, forward, cross) og deres ordning af $u.f$ og $v.f$, se tidligere slide.

**Korollar** til to foregående lemmaer: Graf er en DAG $\Leftrightarrow$ DFS finder ingen back-edges $\Leftrightarrow$ ordning af knuder efter faldende finish-tider giver en topologisk sortering.

Så følgende algoritme finder en topologisk sortering i en DAG:

```
TOPOLOGICAL-SORT(G)
1  call DFS(G) to compute finishing times v.f for each vertex v
2  as each vertex is finished, insert it onto the front of a linked list
3  return the linked list of vertices
```

Tid: $O(n + m)$.