ALGORITMER

Formålet med denne note er at give en introduktion til:

Algoritmer

- Specifikation f.eks. v.h.a. pseudokode
- Analyse
  - Køretid v.h.a. asymptotisk notation
  - Korrekthed f.eks. v.h.a. invarianter

Dette emne er et uddrag af kurset
DM578: Algoritmer og Datastrukturer
som ligger på 2. semester og undervises af Rolf Fagerberg.

En algoritme er en opskrift på, hvordan et givet problem kan løses.

Mere formelt (fra Computer Science: An Overview af Brookshear, Brylow):

An algorithm is an ordered set of unambiguous, executable steps that define a terminating proces.

Til at beskrive algoritmer kan det være nyttigt at bruge pseudokode:
„Høj-niveau sprog", hvor man bruger keywords som i programmeringssprog, men også almindelig tekst.

Eks

Søg efter et element, x, i en liste, L

Kan gøres v.h.a. lineær søgning (også kaldet sekventiel søgning):

SequentialSearch(L, x)

$n := |L|$

$i := 1$

Sålænge $i \leq n$ og $L[i] \neq x$

    $i{+}{+}$

Hvis $i \leq n$

    Returner i

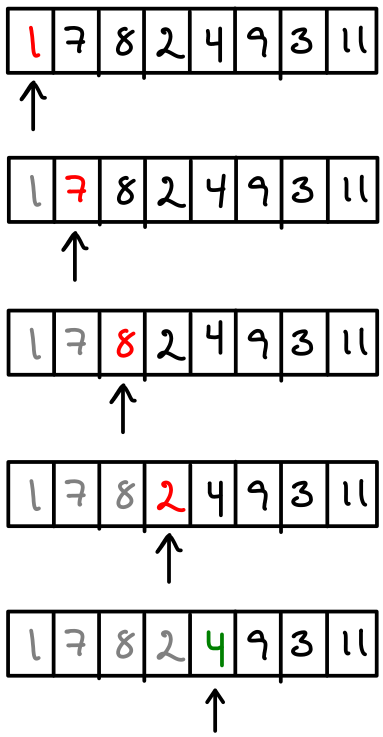
Ellers

    Returner „Ikke fundet"

Er dette en algoritme?

Ordered, unambiguous, executable, terminating?

Eks: $L = \boxed{1 \mid 7 \mid 8 \mid 2 \mid 4 \mid 9 \mid 3 \mid 11}$, $x = 4$



- Hvis x findes på plads i i L, sammenlignes x med samtlige elementer på plads $1, 2, \dots, i$ i L.
- Hvis x ikke findes i L, sammenlignes x med samtlige elementer i L.

Bemærk, at den samlede køretid er proportional med #sammenligninger. Derfor siger vi, at køretiden er $O(n)$. (Vi kalder typisk input-størrelsen n, som i dette eksempel, hvor $n = |L|$.)

Med O-notation giver man en øvre grænse for „størrelsesordenen" af køretiden.

Hvis L er sorteret, kan det gøres mere effektivt v.h.a. binær søgning:

Eks: $L =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

, $x = 10$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Sammenlign midterste element med x

$x > 8$, så vi fortsætter søgningen til højre for 8:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$x < 12$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$x = 10$

BinarySearch(L, x)

$\ell := 1, \quad r := |L|$

$m := \left\lfloor \frac{\ell + r}{2} \right\rfloor$

Så lenge $\ell \leq r$ og $L[m] \neq x$

  Hvis $x < L[m]$

    $r := m - 1$

  Ellers

    $\ell := m + 1$

  $m := \left\lfloor \frac{\ell + r}{2} \right\rfloor$

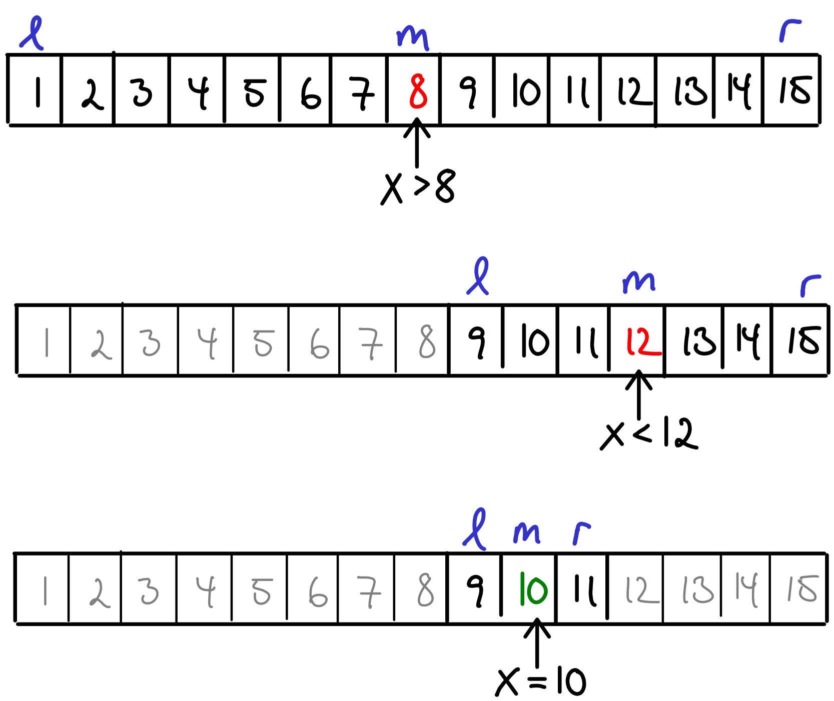
Hvis $\ell \leq r$

  Returner m

Ellers

  Returner „Ikke fundet"

Eks fra før:



<u>Eks:</u> $L =$ [1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15], $x = 10{,}5$

$L =$

l							m							r
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$L =$

								l			m			r
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$L =$

								l	m	r				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$L =$

										l, m, r				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$L =$

									m, r	l				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

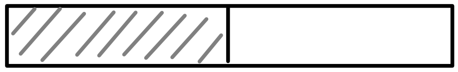
$r < l$ $\rightarrow$ „Ikke fundet"

I eksemplerne ovenfor sammenlignede vi x med h.h.v. 3 og 4 tal ud af 15.
Bemærk, at 4 sammenligninger er worst-case.

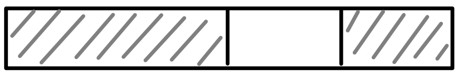
Mere generelt:

Hvor mange tal sammenlignes med x i worst-case?

Efter første sammenligning er der $\leq n/2$ tal tilbage:



Efter anden sammenligning er der $\leq n/4$ tal tilbage:



$\vdots$

Efter i'te sammenligning er der $\leq n/2^i$ tal tilbage.

Den sidste sammenligning foretages senest, når der er 1 element tilbage.
At komme under 1 element kræver $\leq i$ sml., hvor $n/2^i < 1$.

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{2^i} &< 1 &\Leftrightarrow \\
n &< 2^i &\Leftrightarrow \\
\log_2 n &< i &\Leftrightarrow \\
\lfloor \log_2 n \rfloor &\leq i-1 &\Leftrightarrow \\
\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 &\leq i &
\end{aligned}
$$

D.v.s. binær søgning efter x i en liste med n tal bruger aldrig mere end $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ sammenligninger.
Dermed er køretiden $O(\log n)$.

Køretid

<u>Bestemmelse af køretid</u>:

Vælg en karakteristisk operation, sådan at algoritmens samlede køretid er proportional med den samlede tid brugt på denne operation.

I ovenstående eksempler var den karakteristiske operation sammenligning af to tal (x sammenlignes med L[i] eller L[m])

Lineær søgning laver højst n sammenligninger. Derfor er dens køretid, som nævnt tidligere, $O(n)$. Det ville den også være, hvis algoritmen lavede $n/2$ eller $3n$ sammenligninger i worst-case. Løst sagt betyder $O(n)$ „højst proportional med n" eller „vokser ikke hurtigere end n".

<u>Definition</u>

$$T(n) \in O(f(n)) \iff$$

$$\exists k, n_0 : \forall n \geq n_0 : \underbrace{T(n) \leq k \cdot f(n)}_{\iff \frac{T(n)}{f(n)} \leq k}$$

Asymptotisk notation

O	(Store) O	Øvre grænse
Θ	Theta	Øvre og nedre grænse
Ω	(Store) Omega	Nedre grænse
o	Lille o	Skarp øvre grænse
ω	Lille omega	Skarp nedre grænse

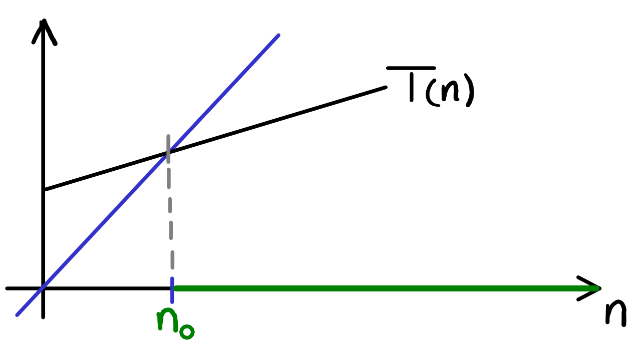
I dette kursus bruger vi kun O-notation.

Eks: $f(n) = n$

$$T(n) \in O(n) \iff$$

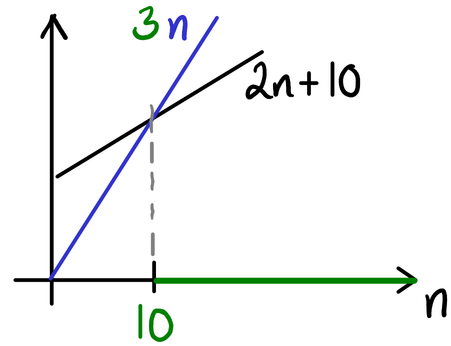
$$\exists k, n_0 : \forall n \geq n_0 : T(n) \leq k \cdot n \quad \text{(per def.)}$$

D.v.s. $T(n) \in O(n)$, hvis grafen for $T(n)$, fra et vist punkt, ligger under en ret linje gennem $(0,0)$:



Eks: $2n+10 \in O(n)$, da

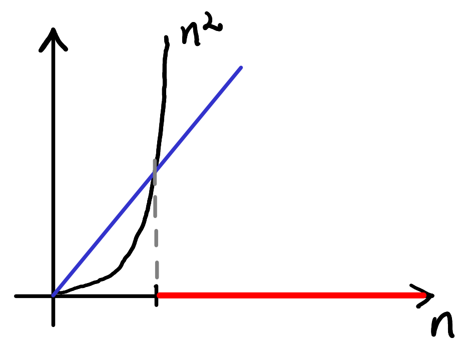
$2n+10 \le \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{3n}$, for $n \ge \underset{\substack{\uparrow \\ n_0}}{10}$



Eks: $n^2 \notin O(n)$, da

$n^2 \le k \cdot n \iff n \le k$

For ethvert valg af k og n_0 findes der et $n \ge n_0$, så $n > k$



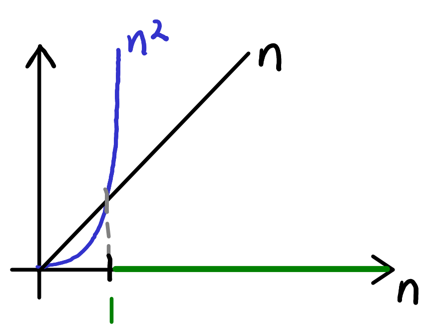
D.v.s.

$\nexists\, k, n_0 : \forall n \ge n_0 : n^2 \le k \cdot n$

Eks: $n \in O(n^2)$, da

$n \le n^2$, for $n \ge 1$

$(k = n_0 = 1)$

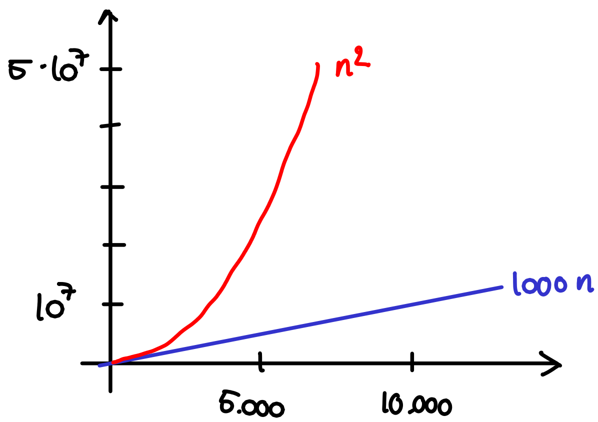


Det, der betyder noget, er det mest betydende led, d.v.s. det, der vokser hurtigst.

Man må altid fjerne mindre betydende led samt konstanter, der ganges på det mest betydende led.

Eks: $10n^2 + 2n - 10 \in O(n^2)$

Eks:



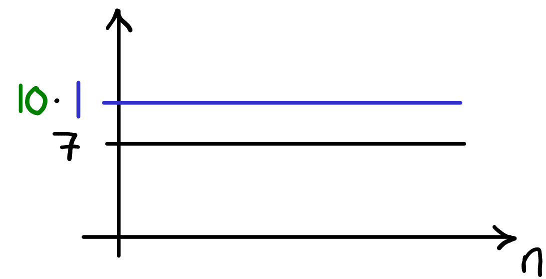
Hvis n er lille, bekymrer vi os typisk ikke så meget om køretiden og vælger evt. bare den simpleste algoritme.

Hvis n er stor, er n^2 meget større end $1000 \cdot n$.

Et par eksempler mere:

Eks: $7 \in O(1)$, da

$7 \leq 10 \cdot 1$, for alle n



Eks: $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \in O(\log n)$, da

$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \leq 2 \cdot \log_2 n$, for $n \geq 2$

Bemerk:

$\log_a(n) \in O(\log_b(n))$, hvis $a, b \in O(1)$

fordi:

$$\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}, \text{ og}$$

$$a, b \in O(1) \Rightarrow \log_b(a) \in O(1)$$

Derfor skriver vi blot $O(\log n)$ i stedet for $O(\log_2 n)$.

Eks: $a=2$, $b=10$.

$$\log_2(n) = \frac{\log_{10}(n)}{\log_{10}(2)} \approx \frac{\log_{10}(n)}{0{,}3} \approx 3{,}3 \cdot \log_{10}(n)$$

Eks: 10^9 operationer i sekundet

#op	$n=100$		$n=10^6$		$n=10^9$	
	#op.	tid	#op	tid	#op.	tid
$\lceil \log_2 n \rceil$	7	7 ns	20	20 ns	$\boxed{30}$ *	30 ns
n	100	100 ns	10^6	1 ms	$\boxed{10^9}$	1 s
n^2	10.000	10 µs	10^{12}	17 min	10^{18}	32 år

*: $10^9 > 30.000.000 \cdot 30$

D.v.s. om køretiden er $\frac{1}{2} \cdot n$ eller $10 \cdot n$ er relativt uvæsentligt.

Det, der betyder noget, er, om den er proportional med n eller $\log n$.

Ovenstående tabel angiver, hvor lang tid det tager at løse et problem af en given størrelse.

Nu vender vi det rundt:

Hvor stor en instans kan vi løse v.h.a. en algoritme med en given køretid inden for en given tid?

Vi antager stadig, at der kan udføres 10^9 operationer i sekundet.
Problem-størrelserne, som er fyldt ind i tabellen allerede, er angivet med et betydende ciffer, bortset fra størrelserne i nederste række, som er angivet med to betydende cifre.

#op. for input af str. n	1 ms	1 s	1 min	1 døgn	1 år
$\log_2 n$	$10^{301.030}$				
n	10^6	10^9		$9 \cdot 10^{13}$	
$n \log_2 n$	$6 \cdot 10^4$			$2 \cdot 10^{12}$	
n^2	10^3			$9 \cdot 10^6$	
n^3	10^2	10^3		$4 \cdot 10^4$	
2^n	20	30			55

Eksempler på køretider :

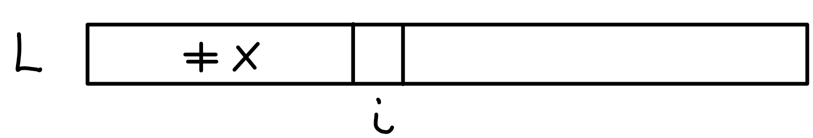
1	konstant	polynomiel
$\log(n)$	logaritmisk	polynomiel
n	lineær	polynomiel
$n \cdot \log(n)$		polynomiel
n^2	kvadratisk	polynomiel
n^3		polynomiel
n^{10}		polynomiel
2^n		eksponentiel
10^n		eksponentiel

Korrekthed

Virker algoritmen, som den skal?
Til at bevise korrekthed af en iterativ eller rekursiv algoritme kan man bruge en invariant.

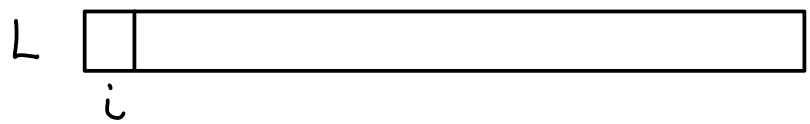
```
SequentialSearch(L,x)
i := 1
Sålænge *I* i ≤ |L| og L[i] ≠ x
    i++
Hvis i ≤ |L|
    Returner i
Ellers
    Returner „Ikke fundet"
```

Invariant I: $x \neq L[j]$, for $1 \leq j \leq i-1$



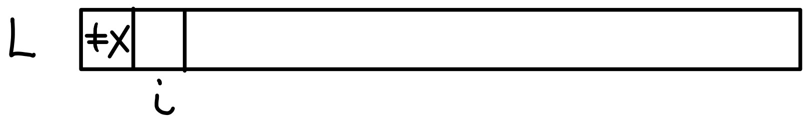
I er opfyldt, hver gang vi kommer til *I*.
Dette kan bevises v.h.a. induktion:

Første gang vi kommer til *I*:



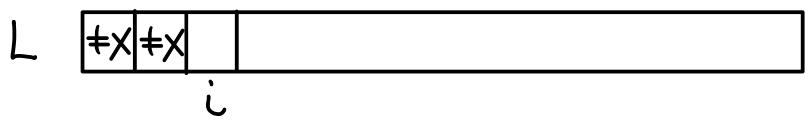
Invarianten siger, at der ikke er nogen elementer før plads i, som er $= x$.
Der er ingen elementer før plads i (da $i = 1$), så udsagnet er trivielt opfyldt.
Dette udgør basistilfældet.

Derefter sammenligner vi x med $L[i]$.
Hvis $x \neq L[i]$, inkrementeres i:



D.v.s. anden gang vi kommer til *I*, er I også opfyldt.

Hvis vi igen finder, at $x \neq L[i]$, inkrementeres i endnu en gang:

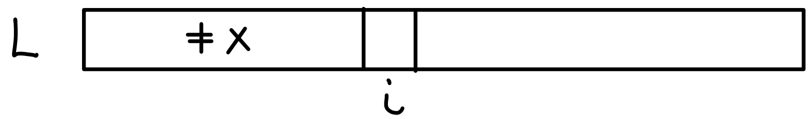


D.v.s. tredje gang vi kommer til *I*, er I også opfyldt.

Og sådan kan vi fortsætte...

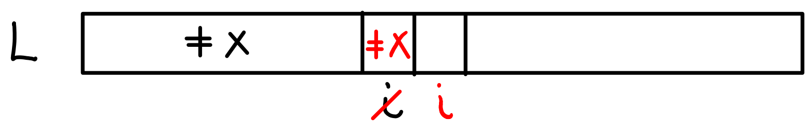
Generelt:

Antag, at I er opfyldt, når vi kommer til *I*:

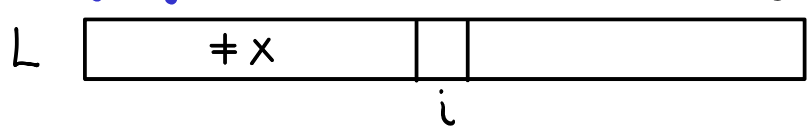


Dette er induktionsantagelsen

Bemærk, at i kun inkrementeres, hvis $x \neq L[i]$:



D.v.s. næste gang vi kommer til *I*, gælder I stadig:



Dette udgør induktionsskridtet.

D.v.s. i induktionsskridtet viser vi:

Hvis I gjaldt sidst, vi var ved *I*,
gælder den også denne gang.

Afslutning:

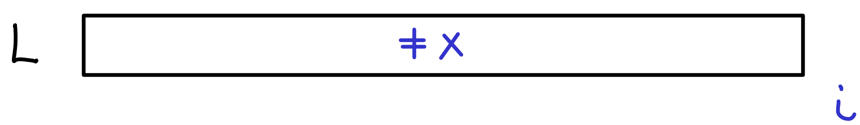
Når vi forlader løkken, skyldes det en af to ting:

$L[i] = x$:

I dette tilfælde returneres i, og det er korrekt, da x findes på plads i i L.

$i = |L|+1$:

I dette tilfælde returneres „Ikke fundet". Da $i > |L|$, følger det af invarianten, at x ikke findes i L:



D.v.s. også korrekt output i dette tilfælde.

Et korrekthedsbevis v.h.a. en invariant består af følgende dele:

- Opskriv I.

  I skal opfylde to ting:
  - I skal være opfyldt, hver gang vi kommer til *I* (d.v.s. I skal være en invariant).
  - I, anvendt ved algoritmens afslutning, skal kunne bruges til at vise, at algoritmens output er korrekt.

- Initialization (= Basistilfælde):

  Bevis, at I gælder første gang, vi kommer til *I*.

- Maintenance (= Induktionsskridt):

  Bevis, at hvis I var opfyldt sidst, vi var ved *I*, er den det også denne gang.

- Termination

  Brug det faktum, at invarianten er opfyldt ved algoritmens afslutning, til at bevise, at output er korrekt.

<u>BinarySearch</u>(L, x)

$\ell := 1, \quad r := |L|, \quad m := \left\lfloor \frac{\ell + r}{2} \right\rfloor$

Sålænge *I* $\ell \leq r$ og $L[m] \neq x$

  Hvis $x < L[m]$

    $r := m - 1$

  Ellers

    $\ell := m + 1$

  $m := \left\lfloor \frac{\ell + r}{2} \right\rfloor$

Hvis $\ell \leq r$

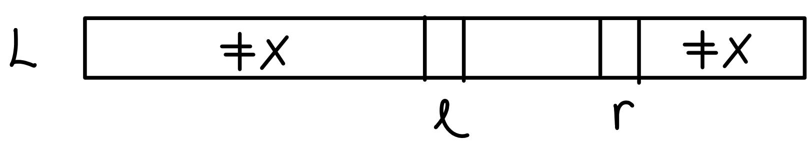
  Returner m

Ellers

  Returner „Ikke fundet"

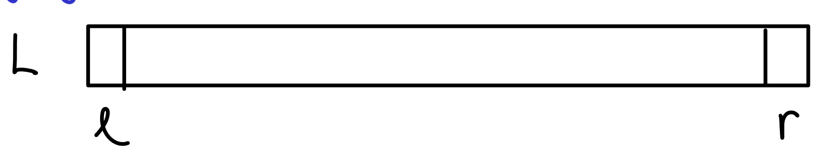
Invariant I:

Hvis x findes i L, findes den i $L[\ell..r]$



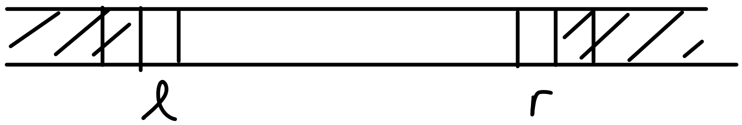
<u>Initialization</u>:

Første gang vi kommer til *I*, er I trivielt sand:



Maintenance:

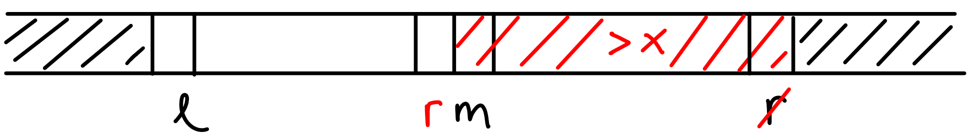
Antag, at I gjaldt i forrige gennemløb af løkken:



Siden da er der sket en af to ting afhængigt af, om $x < L[m]$ eller $x > L[m]$ i forrige kald (der gjaldt <u>ikke</u>, at $x = L[m]$, for så var vi ikke fortsat til nuværende gennemløb).

$x < L[m]$:

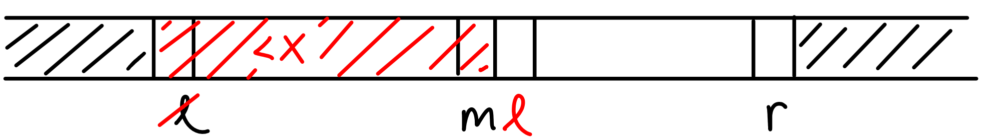
I dette tilfælde opdateres r:



Herefter er I stadig opfyldt

$x > L[m]$:

I dette tilfælde opdateres l:



Herefter er I stadig opfyldt

Termination:

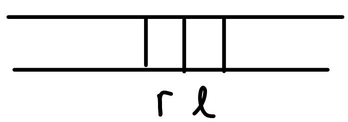
Når løkken forlades, skyldes det en af to ting:

$L[m] = x$:

I dette tilfælde returneres m, og det er korrekt, da x findes på plads m i L.

$\ell > r$:

I dette tilfælde returneres „Ikke fundet"
Da $\ell > r$, er $L[\ell..r]$ tomt:

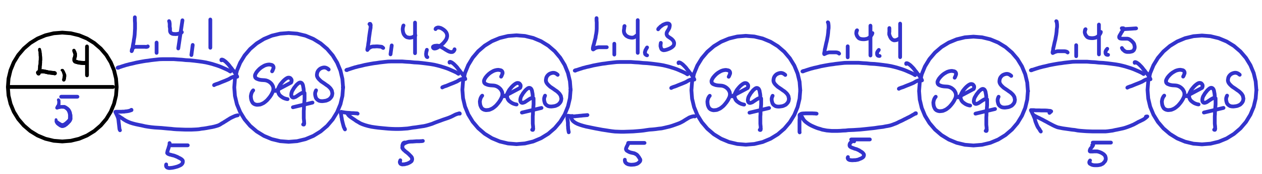


Dermed følger det af I, at x ikke findes i L.
D.v.s. også i dette tilfælde korrekt output.

De to algoritmer er iterative; d.v.s. det meste af arbejdet foregår i en løkke. De kunne også skrives som rekursive algoritmer, d.v.s. algoritmer, som kalder sig selv:

```
SequentialSearch(L, x, i)
Hvis i ≤ |L|
    Hvis L[i] = x
        Returner i
    Ellers
        Returner SequentialSearch(L, x, i+1)
Ellers
    Returner „Ikke fundet"
```

Eks: L = | 1 | 7 | 8 | 2 | 4 | 9 | 3 | 11 | , x = 4



BinarySearch (L, x, ℓ, r)

Hvis $\ell \leq r$

$m := \left\lfloor \frac{\ell + r}{2} \right\rfloor$

Hvis $L[m] = x$

Returner m

Ellers

Hvis $x < L[m]$

Returner BinarySearch$(L, x, \ell, m-1)$

Ellers

Returner BinarySearch$(L, x, m+1, r)$

Ellers

Returner „Ikke fundet"

Korrektheden kan stadig bevises v.h.a. en invariant

<u>SequentialSearch</u> (L, x, i)

$*\,I\,*$

```
Hvis i ≤ |L|
    Hvis L[i] = x
        Returner i
    Ellers
        Returner SequentialSearch(L, x, i+1)
Ellers
    Returner „Ikke fundet"
```

<u>BinarySearch</u> (L, x, ℓ, r)

$*\,I\,*$

```
Hvis ℓ ≤ r
    m := ⌊(ℓ+r)/2⌋
    Hvis L[m] = x
        Returner m
    Ellers
        Hvis x < L[m]
            Returner BinarySearch(L, x, ℓ, m-1)
        Ellers
            Returner BinarySearch(L, x, m+1, r)
Ellers
    Returner „Ikke fundet"
```