Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

7. november 2026
RF

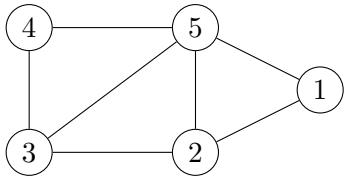
Øvelsestimer DM595 Uge 45/46

II: Løses hjemme inden øvelsestimerne i uge 46

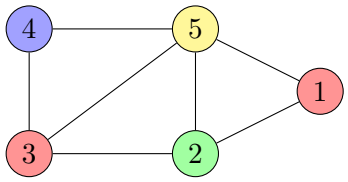
Frivillig ekstraopgave (i forlængelse af forelæsningen):

Problemet

En (uorienteret) graf består af en mængde V af knuder og en mængde af kanter E, hvor hver kant er et (uordnet) par af knuder. Vi kan tildele hver knude et heltals-ID og derved antage $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, hvor n er antallet af knuder. En kant bliver så et uordnet par af heltal, men skrives ofte som et ordnet par, hvor (i, j) og (j, i) så betyder samme kant. Nedenfor er vist en graf med fem knuder og syv kanter. Kanterne er (1,2), (1,5), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5).



En farvning af en graf er en tildeling af farver til knuder, således at det for alle kanter (i, j) gælder, at de to knuder i og j i kanten har forskellig farve. Her er en farvning af grafen ovenfor:



Alle grafer kan naturligvis farves med n farver (ved at give en forskellig farve til hver knude). Et naturligt spørgsmål for en given graf er: hvor få farver kan man nøjes med? For grafen ovenfor (som har $n = 5$) har vi lige set en farvning med fire farver. Men kan man måske nøjes med tre farver? Eller to? Målet i denne opgave er at kunne svare på sådanne spørgsmål ved hjælp af SAT-solving.

Mere præcist ønsker vi for en given graf og et givet antal farver at modellere spørgsmålet *"Kan grafen farves med dette antal farver?"*. Vi ønsker at gøre dette ved hjælp boolske variable og et boolsk udtryk, hvor udtrykket er satisfiable hvis og kun hvis svaret er "ja". Ved at lave binær søgning på antallet af farver (som ligger mellem n og en) kan man derefter finde det mindste antal farver ved hjælp af højst $\log n$ spørgsmål.

Modelleringen

Bemærk først, at hvis man har tre boolske variable x_1, x_2 og x_3, kan man specificere, at præcis én af dem er sand ved hjælp af følgende boolske udtryk:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(x_1 \wedge x_3) \wedge \neg(x_2 \wedge x_3)$$

Princippet for udtrykket er: Første led kræver mindst én af x_1, x_2 og x_3 sand. Resten af leddene kræver, for alle par x_i og x_j ($1 \leq i < j \leq 3$), at højst én i parret er sand. Derfor kan der ikke være to blandt x_1, x_2 og x_3, som er sande. Alt i alt er præcis én af variablene sand. Udtrykket er nemt at lave til CNF via De Morgans love:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

Princippet for udtrykket bruger ikke antallet af variable (tre) til noget, så for vilkårlig k man kan anvende samme princip til at finde et udtryk, som specificerer at præcis én af k boolske variable x_1, x_2,..., x_k er sand (start f.eks. med at gentage princippet for $k = 4$).

Vi vender nu tilbage til hovedspørgsmålet om, hvorvidt en given graf kan farves med et givent antal farver. Ved at give hver farve et heltals-ID, kan vi antage, at farverne hedder 1, 2, ..., K, hvor K er antallet af farver. Vi ønsker at modellere spørgsmålet via boolske variable og laver en variabel $x_{i,k}$ for alle knuder $1 \leq i \leq n$ og for alle farver $1 \leq k \leq K$. Betydningen af en variabel er:

$$x_{i,k} \text{ er sand} \Leftrightarrow \text{knude } i \text{ har farve } k$$

Vi kan nu bruge princippet for "præcis én er sand" fra ovenfor på de K variable $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,K}$ for knude i. Vi gør dette (separat) for alle knuder i. Derved specificerer vi, at hver knude har præcis én farve. Vi kalder dette del A af modelleringen.

Derefter kigger vi på alle kanter. En kant (i, j) betyder, at højst én af knuderne i og j må bruge en given farve k. Dette kan specificeres via udtrykket

$$\neg(x_{i,k} \wedge x_{j,k}),$$

hvilket som CNF er

$$(\neg x_{i,k} \vee \neg x_{j,k})$$

Denne specifikation skal laves for alle kanter $(i, j) \in E$ og for alle farver $1 \leq k \leq c$. Vi kalder dette del B af modelleringen.

Den samlede specifikation består af AND af alle de boolske udtryk nævnt ovenfor under del A og del B af modelleringen. Dette endelige udtryk er allerede i CNF.

Opgaven

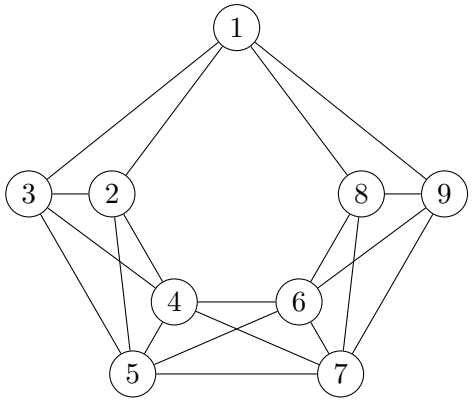
1. Lav et Python-program, som udskriver det boolske udtryk fra ovenstående modellering i DIMACs formatet fra slides. Programmets data er en graf (se filer nedenfor) samt antallet K af farver.

2. Brug derefter dit program samt en SAT-solver til at finde det mindste antal farver, som kan farve grafen ovenfor. Check også, at output af SAT-solveren faktisk giver en lovlig farvning.

   For at spare lidt arbejde er grafens data udleveret i en fil (`graph1.txt`) som starter med n (antal knuder) og derefter på hver linje har de to knude-ID'er for en af grafens kanter.

3. Find ligeledes det mindste antal farver, som kan farve grafen nedenfor. Check også, at output af SAT-solveren faktisk giver en lovlig farvning.

   For at spare lidt arbejde er grafens data udleveret i en fil (`graph2.txt`) som starter med n (antal knuder) og derefter på hver linje har de to knude-ID'er for en af grafens kanter.


1
3
2
8
9
4
6
5
7