INSTITUT FOR MATEMATIK OG DATALOGI

SKRIFTLIG EKSAMEN

DISKRET MATEMATIK

Tirsdag den 2. januar 1996 kl. 9–13

Opgavesættet indeholder 6 opgaver.

Hver opgaves vægt er angivet i procent af hele sættet.
Hvert spørgsmål kan besvares uafhængigt af de øvrige.
Alle hjælpemidler er tilladt.

OPGAVE 1 (10%)

Vis, at der for alle hele tal $n \geq 2$ gælder uligheden

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

OPGAVE 2 (15%)

Angiv samtlige hele tal n, som opfylder de tre betingelser

$$\begin{aligned} n \bmod 8 &= 5 \\ n \bmod 5 &= 3 \\ n \bmod 9 &= 6 \end{aligned}$$

OPGAVE 3 (20%)

Lad a_n betegne antallet af decimale strenge af længde n, som indeholder et lige antal 0-tegn. (En decimal streng er af formen $x_1 x_2 \cdots x_n$, hvor $x_i \in \{0, \cdots, 9\}$. F.eks. indeholder 2478 og 2040 et lige antal 0-tegn, medens 2035 ikke gør.)

(a) Gør rede for, at der gælder

$$a_{n+1} = 8a_n + 10^n \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \cdots .$$

(b) Løs differensligningen i (a) og find et eksplicit udtryk for a_n, $n = 1, 2, \cdots$.

OPGAVE 4 (15%)

Fra et rumskib sendes information til jorden i form af bit-strenge. For $i, j \in \{0, 1\}$ betegner p_{ij} sandsynligheden for, at et afsendt i modtages som j. Værdierne er $p_{00} = 0.9$, $p_{01} = 0.1$, $p_{10} = 0.2$, $p_{11} = 0.8$. Det vides, at i en given afsendt meddelelse er frekvensen af 0-bits $\frac{2}{3}$, medens frekvensen af 1-bits er $\frac{1}{3}$. Opgaven gælder kun denne meddelelse.

(a) Find sandsynligheden for, at en given modtaget bit har værdien 0.

(b) En given bit i meddelelsen modtages som 0. Hvad er sandsynligheden for, at den også er sendt som 0 ?

Vink: Udtryk sandsynligheden for, at en bit både sendes og modtages som 0, på to forskellige måder. Hvis din besvarelse involverer sandsynligheden fra (a), og du ikke kan beregne denne, da brug blot en betegnelse for denne sandsynlighed.

OPGAVE 5 (20%)

25 instruktorer skal undervise 25 hold på forskellige kurser, således at hver instruktor har præcis ét hold. Hver instruktor har kvalifikationer til at klare *mindst* 4 af holdene, medens hvert hold kan klares af *højst* 4 af instruktorerne.

Vis, at det er muligt at fordele instruktorerne på en sådan måde, at hvert hold får en kvalificeret instruktor.

OPGAVE 6 (20%)

Betragt mængden af alle strenge bestående af 5 decimale cifre:

$$S = \{x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \mid x_i \in \{0, \cdots, 9\}\}.$$

Der skal laves skilte, som hver indeholder én streng fra S, og således, at hver streng i S er skrevet på et skilt. Skiltene laves således, at de kan vendes på hovedet. Derved spares arbejde, idet for eksempel skiltet med 01689 også kan bruges for 68910. Det antages altså, at tegnene 0, 1 og 8 er invariante under en rotation på 180 grader, medens 6 og 9 "går over i hinanden".
Hvor mange skilte er det nødvendigt at lave ?