Opgave 1

a) 1. Falsk. Siger, at alle heltal er lige.

2. Sand. Siger, at alle heltal er lige eller ulige.

3. Falsk. Implicerer, at der findes højst to forskellige heltal.

b)

$$\neg(\exists k \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : n = 2k \lor n = 2k+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \neg(\forall n \in \mathbb{Z} : n = 2k \lor n = 2k+1),$$ iflg. De Morgan for kvantorer (Tabel 1.4.2)

$$\Updownarrow$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : \neg(n = 2k \lor n = 2k+1),$$ ——— " ———

$$\Updownarrow$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : n \neq 2k \land n \neq 2k+1,$$ iflg De Morgan for $\lor$ (Tabel 1.3.6)

Opgave 2:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2+1) \cdot (2x+1)$$
$$= 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 + 1$$
$$= 4x^2 + 4x + 2$$

Opgave 3:

a) $l_2 = l_0 + l_1 = 2+1 = 3$

$l_3 = l_1 + l_2 = 1+3 = 4$

$l_4 = l_2 + l_3 = 3+4 = 7$

b) Stærk induktion over n:

Basis: $(n=1$ og $n=2)$

$1 = l_1 = f_0 + f_2 = 0+1 = 1$ ✓

$3 = l_2 = f_1 + f_3 = 1+2 = 3$ ✓

Ind. ant.: $(n \geq 2)$

$l_{n-1} = f_{n-2} + f_n$ og

$l_n = f_{n-1} + f_{n+1}$

Ind. skridt: $(n \geq 2)$

$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= l_{n-1} + l_n, \quad \text{ifølge def. af lukas-tallene} \\
&= (f_{n-2} + f_n) + (f_{n-1} + f_{n+1}), \quad \text{ifølge ind. ant.} \\
&= (f_{n-2} + f_{n-1}) + (f_n + f_{n+1}) \\
&= f_n + f_{n+2}, \quad \text{ifølge def. af fibonacci-tallene.}
\end{aligned}
$$

Opgave 4:

a)
$$a \equiv b \pmod{m}$$
$$\Updownarrow$$
$$m \mid (a-b), \quad \text{ifølge Def. 4.1.3}$$
$$\Updownarrow$$
$$mc \mid (a-b)c$$
$$\Updownarrow$$
$$mc \mid (ac-bc), \quad \text{ifølge Def. 4.1.3}$$
$$\Updownarrow$$
$$ac \equiv bc \pmod{mc}$$

Eller:

$$a \equiv b \pmod{m}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists k \in \mathbb{Z}: \; a = b + km, \quad \text{ifølge Sætning 4.1.4}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists k \in \mathbb{Z}: \; ac = bc + kmc$$
$$\Updownarrow$$
$$ac \equiv bc \pmod{mc}, \quad \text{ifølge Sætning 4.1.4}$$

b) $4 = \underline{2} \cdot \underline{2}$ og $6 = \underline{2 \cdot 3}$

D.v.s.

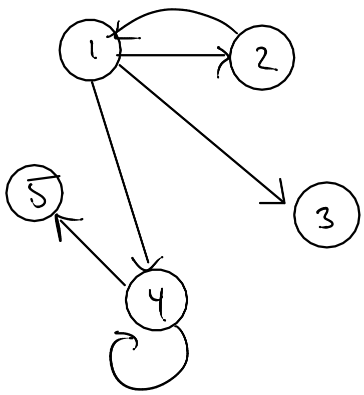
$$\gcd(4,6) = 2 \quad \text{og} \quad \operatorname{lcm}(4,6) = 12$$

c) Nej. De to moduli, 4 og 6, er ikke indbyrdes primiske, da 2 er en faktor i begge.

d) $x = 7$ er en løsning.
D.v.s. ethvert tal på formen $7 + km$, hvor $k \in \mathbb{Z}$ og $4 \mid m$ og $6 \mid m$, er en løsning.
D.v.s. løsningsmængden er $\{7 + 12k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, da $\operatorname{lcm}(4,6) = 12$.

Opgave 5:

a)

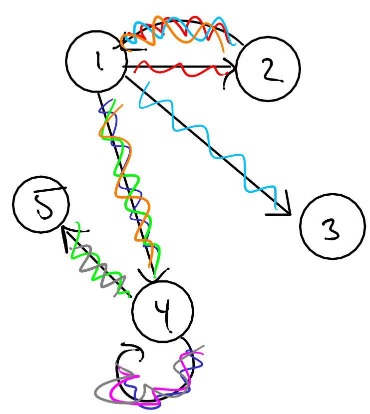


b) Nej. Eks: $(1,1) \notin R$

c) Nej. Eks: $(1,3) \in R$, men $(3,1) \notin R$

d) Nej. Eks: $(1,4), (4,5) \in R$, men $(1,5) \notin R$.

e) $R^2 = \{ (1,1), (1,4), (1,5), (2,2), (2,3), (2,4), (4,4), (4,5) \}$



f) For ethvert par $(a,b) \in S$ gælder $(a,b) \in S^2$, da $(a,a), (a,b) \in S$.

Opgave 6:

Lad $f(x) = e^{x/2 - 1}$

Da er $f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{x/2-1}$

D.v.s. $f^{(n)}(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D.v.s. Taylor-rækken for $f(x)$ omkring $x=2$ er ifølge Def. 8

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!}(x-2)^n$$

Opgave 7

a)

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+2 & 3+3 \\ 2+1 & 4+2 & 6+3 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

b)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot1+3\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot2+3\cdot2 & 1\cdot3+2\cdot3+3\cdot3 \\ 2\cdot1+4\cdot1+6\cdot1 & 2\cdot2+4\cdot2+6\cdot2 & 2\cdot3+4\cdot3+6\cdot3 \\ 4\cdot1+5\cdot1+6\cdot1 & 4\cdot2+5\cdot2+6\cdot2 & 4\cdot3+5\cdot3+6\cdot3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 24 & 36 \\ 15 & 30 & 45 \end{bmatrix}$$

c) Nej, A er ikke symmetrisk, da $3 = a_{13} \neq a_{31} = 4$.